



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

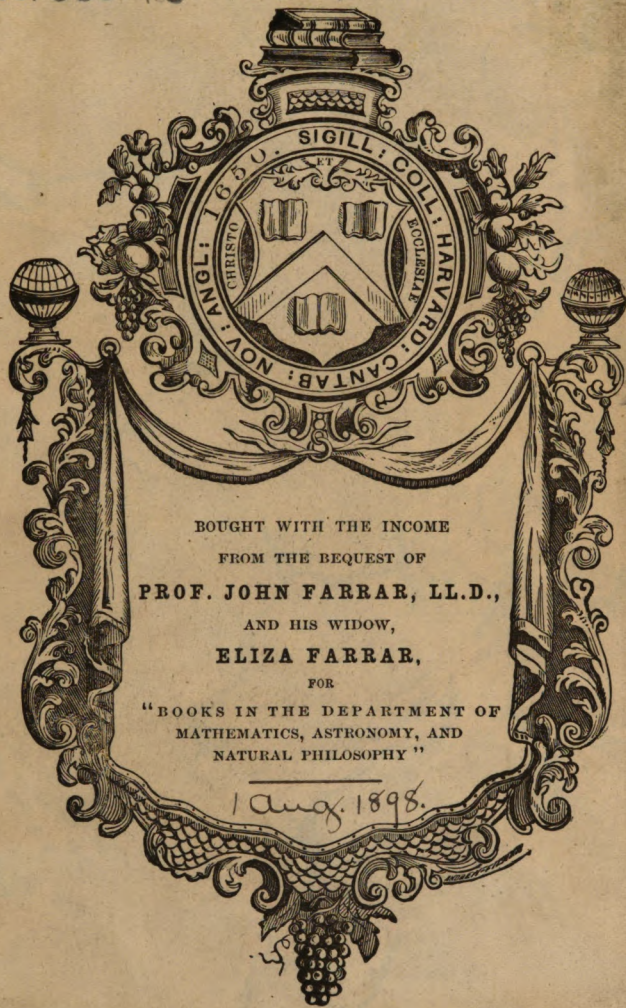
About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>

PER

2680

Sci. 880.48 Period. Shelves



SCIENCE CENTER LIBRARY



BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE.

COMITÉ DE RÉDACTION.

MM. COLLIGNON.

FOURET.

HATON DE LA GOUPILLIÈRE.

JORDAN.

MANNHEIM.

PICQUET.

BULLETIN
DE LA
SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE
DE FRANCE,

PUBLIÉ
PAR LES SECRÉTAIRES.

TOME SEPTIÈME. — ANNÉE 1878-79.

PARIS,
AU SIÈGE DE LA SOCIÉTÉ,
7, RUE DES GRANDS-AUGUSTINS, 7.

1879

Sci. 880.48

Farrar fund

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

ANNÉE 1879.

Président honoraire.....	M. CHASLES.
Président.....	M. OSSIAN BONNET.
Vice-Présidents	{ M. JORDAN. M. LAGUERRE. M. DE POLIGNAC. M. ROUCHE.
Secrétaires	{ M. FOURET. M. PICQUET.
Vice-Secrétaires.....	{ M. MOREL. M. PERRIN.
Archiviste	M. FABRE.
Trésorier.....	M. CLAUDE-LAFONTAINE.
Membres du Conseil	{ M. BRISSE. M. COLLIGNON. M. DARBOUX. M. DE LA GOURNERIE. M. HALPHEN. M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE. M. LAISANT. M. LEMONNIER. M. LUCAS. M. MANNHEIM. M. PUISEUX. M. RESAL.

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Note relative à deux théorèmes de Lagrange sur le centre de gravité; par M. G. DARBOUX.

(Séance du 31 juillet 1878.)

L'intéressante Communication de M. Laisant (*voir le volume précédent*, p. 193) a trait à deux remarquables théorèmes qui, depuis Lagrange, ont été étudiés par différents géomètres. Poinsoth les a donnés dans sa *Statique*, et Jacobi, après les avoir établis dans sa *Mécanique analytique* (p. 22), en fait un usage important dans les considérations qu'il développe sur la stabilité du système du monde.

J'indiquerai ici comment je démontre, dans mon enseignement, les propositions ou plutôt la proposition de Lagrange (car le premier théorème de Lagrange n'est qu'un cas particulier du second). En développant une remarque de Leibnitz, on est conduit, en même temps qu'au théorème de Lagrange, à un nouveau mode d'exposition de la théorie du centre des forces parallèles.

On sait que, étant données trois forces concourantes qui se font équilibre, leur point commun d'application est le centre de gravité du triangle formé par leurs extrémités. Leibnitz a remarqué plus généralement que, si n forces concourantes se font équilibre, leur point commun d'application est le centre de gravité de n points de masses égales placés à leurs extrémités. C'est cette remarque,

un peu généralisée, qui nous servira de point de départ. Nous allons d'abord indiquer quelques définitions qui serviront à abréger les raisonnements.

Étant donnée une force, nous la désignerons toujours en commençant par son point d'application. Ainsi, la force OA aura son point d'application en O et son extrémité en A. Comme nous n'examinerons que des forces concourantes, il n'y a aucun inconvénient à dire qu'une force OA est la résultante de deux forces PB, QC. Cela signifiera que, si les trois forces étaient déplacées parallèlement à elles-mêmes et ramenées à avoir le même point d'application, la première deviendrait la résultante des deux autres. Ainsi, en tenant compte des deux conventions précédentes, nous pourrions dire, étant donné un triangle ABC, que AB est la résultante de AC et de CB.

Étant donnée une force OA, nous dirons que nous la multiplions par un nombre positif ou négatif m , quand nous lui substituerons une force OB de même direction et de même point d'application, égale à la première multipliée par la valeur absolue de m , de même sens si m est positif, de sens contraire si m est négatif. Il est clair que la force $(m_1 + m_2)OA$ est la résultante de $m_1 \overline{OA}$ et de $m_2 \overline{OA}$, et, d'autre part, que, si une force F est la résultante de deux autres F', F'', mF sera de même la résultante de mF' , mF'' .

Ces définitions étant admises, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

THÉOREME I. — *Considérons p points $A_1, A_2, \dots, A_p$ affectés de coefficients positifs ou négatifs $m_1, m_2, \dots, m_p$ dont la somme n'est pas nulle; O désignant un point quelconque de l'espace, la résultante des forces $m_1 \overline{OA_1}, m_2 \overline{OA_2}, \dots, m_p \overline{OA_p}$ ira passer par un point fixe C et sera égale à $M \cdot \overline{OC}$, M désignant la somme $m_1 + m_2 + \dots + m_p$.*

Dans le cas exceptionnel où la somme M est nulle, la résultante conservera une grandeur et une direction invariables quand le point O se déplacera; en particulier, si elle est nulle pour une position du point O, elle sera nulle pour toutes les autres.

Soit, en effet, OR la résultante des forces $m_i \overline{OA_i}$. Cherchons

la résultante $O'S$ quand le point O est remplacé par le point O' et les forces $m_i \overline{OA_i}$ par $m_i \overline{O'A_i}$. La force $O'A_i$ peut être regardée comme la résultante de $O'O$ et de OA_i . De même, $m_i O'A_i$ peut être regardée comme la résultante de $m_i \overline{O'O}$ et de $m_i \overline{OA_i}$. On obtiendra donc la résultante $O'S$: 1° en composant toutes les forces $m_i OA_i$, ce qui donnera OR ; 2° en composant toutes les forces $m_i O'O$, ce qui donnera $M. \overline{O'O}$; 3° en composant les deux résultantes partielles

$$(1) \quad OR \quad \text{et} \quad M. \overline{O'O}.$$

Supposons d'abord que M ne soit pas nul, et déterminons sur OR un point C par la condition

$$OR = M. OC.$$

Alors $O'S$, étant la résultante de $M. \overline{OC}$ et de $M. \overline{O'O}$, sera évidemment égale à $M. \overline{O'C}$. Elle passera donc toujours par le point C , et sera égale à $M. \overline{O'C}$, ce qui démontre la première partie du théorème, relative au cas où M n'est pas nul.

Supposons maintenant que M soit nul. Alors les deux résultantes partielles (1) se réduiront à une seule. $O'S$ sera égale et parallèle à OR , ce qui achève de démontrer la proposition.

Il est évident que le point C , par lequel va passer la résultante quand M n'est pas nul, ne dépend que des rapports mutuels des coefficients m_i . En mettant à profit cette remarque, considérons les forces $m_1 \frac{\overline{OA_1}}{k}$, $m_2 \frac{\overline{OA_2}}{k}$, ..., $m_p \frac{\overline{OA_p}}{k}$; elles auront pour résultante $\frac{M}{k} OC$.

Prenons $k = OA_1$, et supposons que le point O s'éloigne indéfiniment. Alors $\frac{\overline{OA_2}}{k}$, ..., $\frac{\overline{OA_p}}{k}$ auront pour limite l'unité. Les différentes forces $\frac{m_i \overline{OA_i}}{k}$, que l'on peut supposer transportées parallèlement à elles-mêmes de manière que leurs points d'application coïncident avec les points A_i , finiront par devenir parallèles et auront pour grandeurs les valeurs absolues de $m_1, m_2, \dots, m_p$, deux forces correspondantes à des coefficients de signes contraires

ayant des sens opposés. Quant à la résultante qui passe par C et a pour valeur $\frac{M \cdot \overline{OC}}{k}$, on peut transporter son point d'application en C, et elle aura pour valeur limite M. Ainsi la résultante des forces parallèles passera par un point fixe et sera égale à leur somme algébrique. On reconnaît la proposition fondamentale de la théorie des forces parallèles; le point C est le centre des forces parallèles considérées, ou, si l'on veut, le centre de gravité des masses m_i appliquées aux points A_i , et l'on voit que la notion et les propriétés de ce centre se déduisent comme cas particuliers du théorème I.

Ces remarques préliminaires étant faites, nous obtiendrons sans peine le théorème de Lagrange et une proposition nouvelle. Nous avons appelé OR la résultante des forces $m_i \overline{OA_i}$. En employant la formule connue qui donne la résultante en fonction des composantes, nous aurons

$$(2) \quad \overline{OR}^2 = \sum m_i^2 \overline{OA_i}^2 - 2 \sum m_i m_k \overline{OA_i} \overline{OA_k} \cos \widehat{A_i OA_k}.$$

Or, dans le triangle $A_i OA_k$, on a

$$2 \overline{OA_i} \overline{OA_k} \cos \widehat{A_i OA_k} = \overline{OA_i}^2 + \overline{OA_k}^2 - \overline{A_i A_k}^2.$$

En se servant de cette relation pour éliminer les cosinus, la formule (2) deviendra

$$(3) \quad \overline{OR}^2 = M \sum m_i \overline{OA_i}^2 - \sum \sum m_i m_k \overline{A_i A_k}^2.$$

Si l'on remplace OR par $M \cdot \overline{OC}$, on aura précisément la proposition de Lagrange. Sans insister sur ce cas bien connu, je vais examiner spécialement le cas où l'on a $M = 0$. Alors nous savons que la résultante OR est constante en grandeur et en direction, et, en effet, la formule (3) nous donne pour cette résultante la valeur

$$(4) \quad \overline{OR}^2 = - \sum \sum m_i m_k \overline{A_i A_k}^2,$$

indépendante de la position du point O.

Supposons maintenant que, considérant un certain nombre des points A_i , on les supprime et on les remplace par un seul point,

leur centre de gravité, affecté d'une masse égale à la somme de leurs masses, je dis que la résultante ne sera pas changée. En effet, cela revient à supprimer, par exemple, deux forces $m_1 \overline{OA_1}$, $m_2 \overline{OA_2}$, et à ajouter la force $(m_1 + m_2) \overline{OA'}$ dirigée vers le centre de gravité A' des points A_1, A_2 . Or, d'après le théorème I, cette dernière force est la résultante des deux premières. L'opération indiquée a donc pour effet de substituer à deux ou à plusieurs composantes leur résultante partielle, ce qui ne changera pas évidemment la résultante totale.

Donc, dans l'équation (4), le second membre conservera sa valeur quand on substituera aux points A_i les nouveaux points, en nombre moindre, que l'on aura déduits des premiers par des compositions partielles. Nous sommes ainsi conduits à la proposition suivante :

THÉOREME II. — *Considérons un système de points dont la masse totale est nulle. Remplaçons un ou plusieurs groupes de ces points par leurs centres de gravité, en affectant à ces centres la masse totale des points qu'ils remplacent. Pour un quelconque des systèmes de points ainsi obtenus, la somme*

$$\Sigma \Sigma m_i m_k \overline{A_i A_k}^2$$

conservera une valeur constante, négative ou nulle.

Il serait facile de prouver que ce théorème peut donner celui de Lagrange; je me contenterai de faire remarquer que l'on peut toujours réduire à deux le nombre total des points du système, par exemple, en prenant le centre de gravité de tous les points à masse positive d'une part, et, d'autre part, celui des points à masse négative. Soient B, B' les deux points ainsi obtenus de masses $\mu, -\mu$. La somme précédente sera réduite à un seul terme

$$-\mu^2 \overline{BB'}^2,$$

ce qui permettra de la construire géométriquement. Du reste, les points B, B' donnent aussi la direction de la résultante OR ; car, si le point O vient en B' , cette résultante se réduit à la seule composante $\mu B'B$, et, comme elle est constante en grandeur et en direction, elle sera toujours parallèle à BB' et égale à $\mu \overline{B'B}$.

Le théorème II peut conduire à de nombreuses propositions de polygonométrie. J'en indiquerai une seule application.

Soit ABCD un quadrilatère, et soient placées les masses 1, — 1, 1, — 1 aux sommets A, B, C, D. Si nous appelons I, K les milieux des diagonales BD, AC, on aura

$$\overline{BD}^2 + \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2 - \overline{DA}^2 = -4\overline{IK}^2.$$

Sur l'intégrale $\int_0^x z^n e^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz$; par M. LAGUERRE.

(Séance du 22 novembre 1878.)

1. Je suppose, dans tout ce qui suit, que n soit un nombre entier positif. On a évidemment

$$(1) \quad \int_0^x z^n e^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz = -e^{-\frac{x^2}{2} + zx} \Theta_n + U_n \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz + V_n,$$

Θ_n désignant un polynôme entier en x et en z , U_n et V_n deux polynômes entiers en x . Si, pour mettre les variables en évidence, on écrit pour un instant $\Theta_n(z, x)$ au lieu de Θ_n , on a d'ailleurs

$$V_n = \Theta_n(0, x).$$

En dérivant l'équation précédente, on a

$$z^n = -\frac{d\Theta_n}{dz} + \Theta_n(z - x) + U_n,$$

et de cette relation, pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$, on déduit facilement les systèmes de valeurs suivants :

$$U_0 = 1, \quad \Theta_0 = 0; \quad U_1 = x, \quad \Theta_1 = 1; \quad U_2 = x^2 + 1, \quad \Theta_2 = z + x.$$

En général, de l'identité

$$z^{n+1} = -nz^{n-1} + z^n(z - x) + z^n x + nz^{n-1},$$

on déduit

$$(2) \quad U_{n+1} = xU_n + nU_{n-1}$$

et

$$(3) \quad \Theta_{n+1} = z^n + x\Theta_n + n\Theta_{n-1}.$$

2. La relation (2), jointe aux valeurs données de U_0 et de U_1 , montre immédiatement que les polynômes U_n sont précisément ceux qui ont été considérés par M. Hermite, au sujet du développement de $e^{\frac{ax^2}{2} - \frac{a}{2}(x-h)^2}$ en série (1), dans le cas particulier où l'on a $a = -1$ et $h = -x$.

Ces polynômes peuvent donc être définis par l'équation

$$(4) \quad e^{\frac{z^2}{2} + zx} = U_0 + U_1 z + \frac{U_2}{1.2} z^2 + \dots + \frac{U_n}{1.2.3\dots n} z^n + \dots$$

3. De l'égalité

$$\int_0^z z^n e^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz = -e^{-\frac{z^2}{2} + zx} \Theta_n + U_n \int_0^z e^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz + V_n,$$

on déduit, en égalant les dérivées des deux membres par rapport à x ,

$$\begin{aligned} & -e^{-\frac{z^2}{2} + zx} \Theta_{n+1} + U_{n+1} \int_0^z e^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz + V_{n+1} \\ &= -ze^{-\frac{z^2}{2} + zx} \Theta_n - e^{-\frac{z^2}{2} + zx} \frac{d\Theta_n}{dx} + \frac{dU_n}{dx} \int_0^z e^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz \\ & \quad + \frac{dV_n}{dx} + U_n \int_0^z ze^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz \\ &= -ze^{-\frac{z^2}{2} + zx} \Theta_n - e^{-\frac{z^2}{2} + zx} \frac{d\Theta_n}{dx} + \left(xU_n + \frac{dU_n}{dx}\right) \int_0^z e^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz \\ & \quad + \frac{dV_n}{dx} - U_n e^{-\frac{z^2}{2} + zx} + U_n; \end{aligned}$$

d'où les relations suivantes :

$$(4) \quad \Theta_{n+1} = z\Theta_n + \frac{d\Theta_n}{dx} + U_n,$$

$$(5) \quad U_{n+1} = xU_n + \frac{dU_n}{dx},$$

$$(6) \quad V_{n+1} = \frac{dV_n}{dx} + U_n.$$

(1) Sur un nouveau développement en série des fonctions (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 8 février 1864, t. LVIII).

4. On en déduit facilement ces équations

$$nU_{n-1} = \frac{dU_n}{dx}$$

et

$$(7) \quad \frac{d^2U_n}{dx^2} + x \frac{dU_n}{dx} - nU_n = 0,$$

qui ont été données par M. Hermite.

Posons, pour abréger,

$$\Theta_n = e^{\frac{x^2}{2} - zx} H_n;$$

on aura les relations suivantes :

$$H_{n+1} = e^{-\frac{x^2}{2} + zx} z^n + x H_n + n H_{n-1}$$

et

$$H_{n+1} = x H_n + \frac{dH_n}{dx} + U_n e^{-\frac{x^2}{2} + zx};$$

d'où

$$n H_{n-1} = \frac{dH_n}{dx} + e^{-\frac{x^2}{2} + zx} (U_n - z^n)$$

et

$$(8) \quad \frac{d^2H_n}{dx^2} + x \frac{dH_n}{dx} - n H_n = e^{-\frac{x^2}{2} + zx} \left(z^{n+1} - z U_n - 2 \frac{dU_n}{dx} \right).$$

Il est remarquable que, le polynôme U_n étant une solution de l'équation linéaire du second ordre

$$y'' + xy' - ny = 0,$$

la fonction

$$H_n = e^{-\frac{x^2}{2} + zx} \Theta_n$$

satisfasse à l'équation

$$y'' + xy' - ny = e^{-\frac{x^2}{2} + zx} \left(z^{n+1} - z U_n - 2 \frac{dU_n}{dx} \right),$$

qui ne diffère de la précédente que par la présence du second membre.

5. Les fonctions Θ peuvent s'exprimer facilement au moyen des fonctions U .

On a, en effet,

$$(9) \quad \Theta_{n+1} = \Sigma A_{m,n} U_m, \quad (m = 0, 1, 2, \dots, n),$$

où, en posant, pour abréger, $n - m = \mu$,

$$A_{m,n} = z^\mu + \frac{m+1}{1} (\mu-1) z^{\mu-2} + \frac{(m+1)(m+2)}{1.2} (\mu-2)(\mu-3) z^{\mu-4} \\ + \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3} (\mu-3)(\mu-4)(\mu-5) z^{\mu-6} \dots$$

Le terme constant de cette expression est nul si μ est impair, et, si μ est pair, égal à

$$\frac{(m+1)(m+2)\dots\left(m+\frac{\mu}{2}\right)}{1.2.3\dots\frac{\mu}{2}}.$$

Par suite, en faisant, dans la relation (9),

$$z = 0,$$

il vient

$$(10) \quad V_{n+1} = U_n + (n-1)U_{n-2} + (n-2)(n-3)U_{n-4} + \dots$$

6. En faisant $z = \infty$ dans l'équation (1), il vient

$$\int_0^\infty z^n e^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz = U_n \int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz + V_n,$$

ou encore

$$\int_0^\infty z^n e^{-\frac{1}{2}(z-x)^2} dz = U_n \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(z-x)^2} dz + V_n e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Posons $z - x = t$, il viendra

$$(11) \quad \int_{-\infty}^x (x-t)^n e^{-\frac{t^2}{2}} dt = U_n \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt + V_n e^{-\frac{x^2}{2}},$$

formule où figure dans le premier membre l'intégrale multiple d'ordre n de la fonction $e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Ces intégrales multiples donnent donc naissance aux mêmes polynômes U_n qui, dans la théorie développée par M. Hermite, proviennent des dérivées successives de la fonction $e^{\frac{x^2}{2}}$.

*Sur la résolution de trois équations du second degré en x, y, z ;
par M. LEMONNIER.*

(Séance du 22 novembre 1878.)

Étant données les trois équations du second degré

$$(1) \quad \begin{cases} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy \\ \quad + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0, \\ A_1x^2 + A_1'y^2 + A_1''z^2 + 2B_1yz + 2B_1'zx + 2B_1''xy \\ \quad + 2C_1x + 2C_1'y + 2C_1''z + D_1 = 0, \\ A_2x^2 + A_2'y^2 + A_2''z^2 + 2B_2yz + 2B_2'zx + 2B_2''xy \\ \quad + 2C_2x + 2C_2'y + 2C_2''z + D_2 = 0, \end{cases}$$

elles peuvent ou non se résoudre par rapport aux carrés de deux variables et de leur produit, suivant que l'un au moins des trois déterminants

$$\begin{vmatrix} A' & A'' & B \\ A'_1 & A''_1 & B_1 \\ A'_2 & A''_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A'' & A & B' \\ A''_1 & A_1 & B'_1 \\ A''_2 & A_2 & B'_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A & A' & B'' \\ A_1 & A'_1 & B''_1 \\ A_2 & A'_2 & B''_2 \end{vmatrix}$$

est différent de zéro, ou qu'ils sont nuls à la fois.

I.

Supposons qu'on ait

$$(2) \quad \delta = \begin{vmatrix} A' & A'' & B \\ A'_1 & A''_1 & B_1 \\ A'_2 & A''_2 & B_2 \end{vmatrix} \geq 0.$$

En résolvant les trois équations (1) par rapport à y^2, z^2, yz ,

on les mettra sous la forme

$$(3) \quad \begin{cases} y^2 = ay + bz + c, \\ z^2 = a'y + b'z + c', \\ yz = py + qz + r, \end{cases}$$

a, b, a', b', p, q désignant des fonctions entières de x du premier degré, c, c', c'' des fonctions du second degré.

Déduisons de là deux expressions du produit $y^2 z = y y z$, en les ramenant à être du premier degré en y et z . On a

$$\begin{aligned} y^2 z &= (ay + bz + c)z = ayz + bz^2 + cz \\ &= a(py + qz + r) + b(a'y + b'z + c') + cz \\ &= (ap + ba')y + (aq + bb' + c)z + ar + bc' \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y y z &= y(py + qz + r) = py^2 + qyz + ry \\ &= p(ay + bz + c) + q(py + qz + r) + ry \\ &= (ap + pq + r)y + (bp + q^2)z + pc + qr. \end{aligned}$$

Il s'ensuit

$$(pq + r - ba')y + (q^2 + bp - aq - bb' - c)z + pc + qr - ar - bc' = 0.$$

On trouve d'une façon semblable

$$\begin{aligned} z^2 y &= (a'y + b'z + c')y = a'y^2 + b'zy + c'y \\ &= a'(ay + bz + c) + b'(py + qz + r) + c'y \\ &= (aa' + b'p + c')y + (ba' + qb')z + a'c + b'r, \\ zzy &= z(py + qz + r) = pyz + qz^2 + rz \\ &= q(a'y + b'z + c') + p(py + qz + r) + rz \\ &= (p^2 + qa')y + (pq + b'q + r)z + qc' + pr, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} (p^2 + qa' - b'p - aa' - c')y + (pq + r - ba')z \\ + pr + qc' - b'r - ca' = 0; \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} y^2 z^2 &= (py + qz + r)^2 = p^2 y^2 + q^2 z^2 + 2pqyz + 2pry + 2qzr + r^2 \\ &= p^2(ay + bz + c) + q^2(a'y + b'z + c') \\ &\quad + 2pq(py + qz + r) + 2pry + 2qzr + r^2 \\ &= (ap^2 + a'q^2 + 2p^2q + 2pr)y \\ &\quad + (bp^2 + b'q^2 + 2pq^2 + 2qr)z + p^2c + q^2c' + 2pqr + r^2 \end{aligned}$$

vii.

2

et

$$\begin{aligned}
 y^2 z^2 &= (ay + bz + c)(a'y + b'z + c') \\
 &= aa'y^2 + bb'z^2 + (ab' + ba')yz + (ac' + ca')y + (bc' + cb')z + cc' \\
 &= aa'(ay + bz + c) + bb'(a'y + b'z + c') \\
 &\quad + (ab' + ba')(py + qz + r) + (ac' + ca')y + (bc' + cb')z + cc' \\
 &= [a^2 a' + ba'b' + (ab' + ba')p + (ac' + ca')]y \\
 &\quad + [aba' + bb'^2 + (ab' + ba')q + bc' + cb']z \\
 &\quad + aa'c + bb'c' + (ab' + ba')r + cc',
 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
 &[ap^2 + a'q^2 + 2p^2 q + 2pr - (a^2 + bb')a' - (ab' + ba')p - (ac' + ca')]y \\
 &+ [bp^2 + b'q^2 + 2pq^2 + 2qr - (b'^2 + aa')b - (ab' + ba')q - (bc' + cb')]z \\
 &\quad + cp^2 + c'q^2 + 2pqr + r^2 - (ab' + ba')r - aa'c - bb'c' - cc' = 0.
 \end{aligned}$$

Nous avons ainsi trois équations du premier degré en y et z ,

$$(4) \quad \begin{cases} Ly + Mz + N = 0, \\ L_1 y + M_1 z + N_1 = 0, \\ L_2 y + M_2 z + N_2 = 0, \end{cases}$$

qui donnent, à l'égard de x , l'équation

$$(5) \quad \Delta = \begin{vmatrix} L & M & N \\ L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 \end{vmatrix} = 0.$$

C'est, en général, l'équation résultante en x , du huitième degré.

Les éléments ont pour valeurs

$$(6) \quad \begin{cases} L = pq + r - ba', \\ M = q^2 + bp - aq - bb' - c, \\ N = cp + qr - ar - bc', \\ L_1 = p^2 + a'q - b'p - aa' - c', \\ M_1 = pq + r - ba', \\ N_1 = pr + c'q - b'r - ca', \\ L_2 = ap^2 + a'q^2 + 2p^2 q + 2pr \\ \quad - (a^2 + bb')a' - (ab' + ba')p - (ac' + ca'), \\ M_2 = bp^2 + b'q^2 + 2pq^2 + 2qr \\ \quad - (b'^2 + aa')b - (ab' + ba')q - (bc' + cb'), \\ N_2 = cp^2 + c'q^2 + 2pqr + r^2 - (ab' + ba')r - aa'c - bb'c' - cc'. \end{cases}$$

On voit que l'on a $M_1 = L$, et il est aisé de reconnaître que :

$$(7) \quad \begin{cases} L_2 = L_1 a + M a' + 2pL, & N = (q - a)L + pM - bL_1, \\ M_2 = L_1 b + M b' + 2qL, & N_1 = (p - b')L - qL_1 + a'M, \end{cases}$$

et

$$N_2 = cL_1 + c'M + rL + p(cb' - bc') + q(ac' - ca') + r(pq - ab') + cc'.$$

Comme exemple, soit

$$y^2 = bz + c, \quad z^2 = b'z + c', \quad yz = qz + r.$$

L'équation (5) donne là

$$\begin{aligned} [r^2 + c'(q^2 - bb' - c)] - [b'q^2 + 2qr - bb'^2 - bc' - cb'] \\ \times [r(qc' - b'r) + c'(qr - bc')] = 0, \end{aligned}$$

résultat qui s'obtient aisément d'autre façon.

Par l'élimination de y , on obtient

$$z^2(bz + c) = (qz + r)^2,$$

par suite,

$$(bz + c)(b'z + c') = (qz + r)^2;$$

de sorte que

$$(q^2 - bb')z^2 + (2qr - bc' - cb')z + r^2 - cc' = 0,$$

avec

$$z^2 - b'z - c' = 0,$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{z^2}{-c'(2qr - bc' - cb') + b'(r^2 - cc')} &= \frac{z}{r^2 - cc' + c'(q^2 - bb')} \\ &= \frac{1}{-b'(q^2 - bb') - 2qr + bc' + cb'}, \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} [r + c'(q^2 - bb' - c)]^2 - [b'(q^2 - bb') + 2qr - bc' - cb'] \\ \times [c'(2qr - bc' - cb') - b'(r^2 - cc')] = 0, \end{aligned}$$

comme plus haut.

Les équations ainsi obtenues se prêtent à une discussion qui n'est pas sans intérêt.

Deux circonstances principales sont à examiner : celle où le déterminant Δ n'est pas nul identiquement, et celle où il se trouve nul pour toute valeur de x .

Soit Δ une fonction de x ou une constante autre que zéro.

Si Δ ne dépend pas de x sans être nul, les équations (4) sont incompatibles pour toute valeur finie de x . Les équations (1) n'ont pas de solution finie.

Si Δ dépend de x , l'équation (5), du huitième degré au plus, aura des racines. Attribuons à x une valeur qui annule Δ . Pour cette valeur, les équations (4) se réduiront à deux, ou se trouveront incompatibles, ou se réduiront à une seule, ou encore se trouveront identiquement vérifiées, en ce que la valeur de x annulera à la fois les coefficients de y , de z , et les termes indépendants de y et de z .

Dans le premier de ces cas, deux équations étant distinctes, les coefficients de y et de z ne donneront pas un déterminant nul ; on en pourra déduire des valeurs de y et de z . De là une solution des équations (1) : c'est le cas général.

Si, dans les trois équations (4), les coefficients de y et de z se trouvent proportionnels sans que les autres termes soient dans les mêmes rapports, le système de ces équations n'aura pas de solution ; il en sera de même des équations (1).

Si les équations se réduisent à une seule par la proportionnalité des coefficients et des termes connus, il y aura lieu d'y joindre l'une des équations (3). Comme il ne peut en être autrement lorsque les équations (1) présentent deux solutions composées d'une même valeur de x avec des valeurs de y et de z qui ne sont pas les mêmes, l'équation résultante (5) doit alors présenter, comme racine double, au moins la valeur de x dont il s'agit.

Nous allons reconnaître par une analyse directe que cela a bien lieu.

Dans les conditions dont il s'agit, on a, pour la valeur de x considérée,

$$\frac{L_1}{L} = \frac{M_1}{M} = \frac{N_1}{N}, \quad \frac{L_2}{L} = \frac{M_2}{M} = \frac{N_2}{N}, \quad \frac{L_3}{L} = \frac{M_3}{M} = \frac{N_3}{N}.$$

Eu égard aux relations (7), on a

$$\Delta = N_2(L^2 - ML_1) + N_1[-2qL^2 + a'M^2 + (2p - b')LM - bLL_1 + aML_1] \\ + N[-2pL^2 + bL_1^2 + (2q - a)LL_1 - a'LM + b'ML_1].$$

Cherchons ce que devient la dérivée de Δ par rapport à x pour la racine dont il s'agit.

Il est à observer que, cette racine annulant les coefficients de N, N_1, N_2 dans Δ , nous pouvons omettre les dérivées de ces éléments. Nous aurons donc, en faisant l'omission, et tenant compte des valeurs de N_2 et de N_1 ,

$$\begin{aligned}
 ND_{x\Delta} &= \frac{aL_1 + a'M + 2pL}{L} (L^2 - ML_1)' \\
 &+ \frac{L_1}{L} (-2qL^2 + a'M^2 + (2p - b')LM - bLL_1 + aML_1)' \\
 &+ (-2pL^2 + bL_1^2 + (2q - a)LL_1 - a'LM + b'ML_1)' \\
 &= 2L'(aL_1 + a'M + 2pL) - L'_1 \frac{L}{L_1} (aL_1 + a'M + 2pL) \\
 &- M' \frac{L_1}{L} (aL_1 + a'M + 2pL) \\
 &+ \frac{L_1}{L} \{ -4qLL' - 2L^2q' + 2a'MM' \\
 &\quad + M^2(a')' + L'M(2p - b') + LM'(2p - b') \\
 &\quad + LM[2p' - (b')'] - L'L_1b - LL'_1b - LL_1(b)' + L'_1Ma \\
 &\quad + L_1M'a + L_1M(a')' \} \\
 &- 4LL'p - 2L^2p' - 2bL_1L'_1 + L_1^2(b)' \\
 &+ L'L_1(2q - a) + LL'_1(2q - a) \\
 &+ LL_1[2q' - (a)'] - L'Ma' - LM'a' - LM(a')' \\
 &+ L'_1Mb' + L_1M'b' + L_1M(b)' \\
 &= aL_1L' + a'ML' - aLL'_1 - a' \frac{LM}{L_1} L'_1 \\
 &- 2pML'_1 - 2qL_1L' + (2p - b')LL' \\
 &- b \frac{L_1^2}{L} L' + aLL'_1 + bL_1L'_1 + (2q - a)LL'_1 + b'ML'_1.
 \end{aligned}$$

Mais la relation

$$\frac{aL_1 + a'M + 2pL}{L} = \frac{bL_1 + b'M + 2qL}{M},$$

à cause de $\frac{L}{L_1} = \frac{M}{L}$, donne

$$\frac{bLL_1}{M} = \frac{bL_1^2}{L} = aL_1 + a'M + 2pL - b'L - 2qL_1,$$

et la relation

$$\frac{aL_1 + a'M + 2pL}{L_1} = \frac{bL_1 + b'M + 2qL}{L}$$

donne de même

$$a' \frac{LM}{L_1} = bL_1 + b'M + 2qL - aL - 2pM.$$

En substituant ces valeurs, on trouve

$$ND_x \Delta = 0;$$

la racine considérée est donc racine double au moins.

Lorsqu'une racine de $\Delta = 0$ annule à la fois L, M, L_1, N, N_1, N_2 , les équations (4) disparaissent. C'est alors une racine triple de Δ , car elle annule les deux premières dérivées de Δ , puisque les termes de ce déterminant sont du troisième degré à l'égard de ces éléments.

Comme on a, pour lors,

$$c = q^2 + bp - aq - bb',$$

$$c' = p^2 + a'q - aa' - b'p,$$

$$r = pq - ba',$$

les équations (3) deviennent

$$y^2 = ay + bz + q^2 + bp - aq - bb',$$

$$z^2 = a'y + b'z + p^2 - a'q - aa' - b'p,$$

$$yz = py + qz + ba' - pq,$$

c'est-à-dire

$$(y - q)(y + q) = a(y - q) + b(z + p - b'),$$

$$(z - p)(z + p) = b'(z - p) + a'(y + q - a),$$

$$(z - p)(y - q) = ba'$$

ou

$$(y - q)(y + q - a) = b(z + p - b'),$$

$$(z - p)(z + p - b') = a'(y + q - a),$$

$$(z - p)(y - q) = ba'.$$

De là

$$z - p = \frac{ba'}{y - q},$$

$$z + p - b' = \frac{ba'}{y - q} + 2p - b' = \frac{(y - q)(2p - b') + ba'}{y - q};$$

puis

$$(y - q)^2(y + q - a) = b(y - q)(2p - b') + b^2 a'.$$

Ainsi, y est donné par une équation du troisième degré; trois couples des valeurs de y et de z correspondent à la valeur de x .

Là, si b devient nul, on a

$$(y - q)^2 = 0 \quad \text{ou} \quad y + q - a = 0.$$

Pour $(y - q)^2 = 0$, on a

$$(z - p)(z + p - b') = a'(2q - a),$$

et, pour $y + q - a = 0$, on a

$$z - p = 0.$$

Les équations (3) ne comportent pas qu'il y ait pour une valeur de $x = x_1$ quatre couples de valeurs correspondantes de y et de z , que par suite l'équation résultante ait une racine quadruple.

Car, si les équations (1)

$$P = Ax^3 + \dots + D = 0,$$

$$Q = A_1 x^2 + \dots + D_1 = 0,$$

$$R = A_2 x^2 + \dots + D_2 = 0$$

présentaient quatre solutions pour $x = x_1$, on aurait, pour cette valeur de x ,

$$R = \lambda P + \mu Q;$$

par suite,

$$A'_2 = \lambda A'_1 + \mu A'_1,$$

$$A''_2 = \lambda A''_1 + \mu A''_1,$$

$$B_2 = \lambda B_1 + \mu B_1,$$

et, en conséquence,

$$\delta = \begin{vmatrix} A' & A'' & B \\ A'_1 & A''_1 & B_1 \\ A'_2 & A''_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

Nous avons à voir, en second lieu, ce qui concerne les équations (3) et (4), quand le déterminant Δ est nul pour toute valeur de x .

Si deux des équations (4) présentent alors pour y et z des coefficients qui ne soient pas proportionnels pour toute valeur de x , les équations (4), x restant arbitraire, reviennent à ces deux équations. Celles-ci détermineront alors y et z pour toute valeur attribuée à x arbitrairement. Il y aura une ligne commune sur les surfaces représentées par les équations (3), mais cette ligne ne présentera qu'un point, en général, dans un plan quelconque parallèle au plan yz . Comme, d'ailleurs, pour toute valeur de x d'un module fini, les équations (3) ne peuvent admettre que des valeurs finies de y et de z , la ligne sera une ligne droite.

Cette droite pourra analytiquement se fixer par deux points particuliers. Mais les trois surfaces n'auront-elles pas d'autres points communs que ceux de la droite? Pour étudier la question, considérons le cas où l'axe des x est une droite commune.

Les équations (3) sont alors

$$y^2 = ay + bz, \quad z^2 = a'y + b'z, \quad yz = py + qz,$$

et les équations (4) deviennent

$$\begin{aligned} (pq - ba')y + (q^2 + bp - aq - bb')z &= 0, \\ (p^2 + a'q - b'p - aa')y + (pq - ba')z &= 0, \\ [ap^2 + a'q^2 + 2p^2q - (a^2 + bb')a' - (ab' + ba')p]y \\ + [bp^2 + b'q^2 + 2pq^2 - (b'^2 + aa')b - (ab' + ba')q]z &= 0, \end{aligned}$$

Les deux premières de ces dernières équations se réduisent à une seule pour toute valeur de x satisfaisant à la condition

$$(pq - ba')^2 - (p^2 + a'q - b'p - aa')(q^2 + bp - aq - bb') = 0.$$

C'est, en général, une équation du quatrième degré qui donnera quatre valeurs de x . Pour avoir les valeurs de y et de z correspondantes à une racine, on prendra

$$\begin{aligned} (pq - ba')y + (q^2 + bp - aq - bb')z &= 0, \\ yz &= py + qz. \end{aligned}$$

De là

$$\begin{aligned} \frac{y}{q^2 + bp - aq - bb'} &= \frac{z}{ba' - pq}, \\ y(ba' - pq) &= p(q^2 + bp - aq - bb') + q(ba' - pq), \\ z(q^2 + bp - aq - bb') &= p(q^2 + bp - aq - bb') + q(ba' - pq). \end{aligned}$$

Pour que l'équation $y^2 = ay + bz$ soit vérifiée par les valeurs de y et de z ainsi obtenues, il faut avoir

$$y(q^2 + bp - aq - bb') = a(q^2 + bp - aq - bb') + b(ba' - pq),$$

puis

$$\begin{aligned} \frac{q^2 + bp - aq - bb'}{ba' - pq} &= \frac{a(q^2 + bp - aq - bb') + b(ba' - pq)}{p(q^2 + bp - aq - bb') + q(ba' - pq)} \\ &= \frac{b(ba' - pq)}{-aba' + bp^2 - bb'p + a'bp} = \frac{ba' - pq}{p^2 + a'q - b'p - aa'}, \end{aligned}$$

ce qui est la relation supposée.

L'équation $z^2 = a'y + b'z$ est également vérifiée.

Ainsi, outre la droite commune, il y a quatre points communs sur lesquels, bien entendu, il peut s'en trouver de coïncidents ou passant à l'infini.

Observons toutefois que, si l'on avait pour toutes valeurs de x

$$(pq - ba')^2 - (p^2 + a'q - b'p - aa')(q^2 + bp - aq - bb') = 0$$

ou

$$\frac{pq - ba'}{p^2 + a'q - b'p - aa'} = \frac{q^2 + bp - aq - bb'}{pq - ba'},$$

on satisferait aux équations proposées, sans détermination de x , par des valeurs de y et de z déduites de

$$yz = py + qz \quad \text{et} \quad (qp - ba')y + (q^2 + bp - aq - bb')z = 0.$$

Ces valeurs, étant

$$y = q + \frac{p(q^2 + bp - aq - bb')}{ba' - pq},$$

$$z = p + \frac{q(ba' - pq)}{q^2 + bp - aq - bb'},$$

seraient du premier degré en x , si le rapport $\frac{pq - ba'}{p^2 + a'q - b'p - aa'}$ était constant. Il y aurait donc alors une seconde droite commune.

Mais on peut voir aisément que

$$\begin{aligned} (ax^2 + bx + c)^2 &= \left[ax^2 + (b + \sqrt{b^2 - 4ac})x + \frac{b^2 - 2ac + b\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right] \\ &\times \left[ax^2 + (b - \sqrt{b^2 - 4ac})x + \frac{b^2 - 2ac - b\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right]; \end{aligned}$$

de sorte que

$$= \frac{\frac{ax^2 + bx + c}{ax^2 + (b + \sqrt{b^2 - 4ac})x + \frac{b^2 - 2ac + b\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}}{\frac{ax^2 + (b - \sqrt{b^2 - 4ac})x + \frac{b^2 - 2ac - b\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}{ax^2 + bx + c}},$$

identité où les membres varient avec x .

Si le rapport $\frac{pq - ba'}{p' + a'q - b'p - aa'}$ était donc dans ces conditions, les expressions précédentes de y et de z ne seraient plus du premier degré en x . Avec la droite ox commune, les trois surfaces auraient une ligne du troisième degré commune, une cubique commune, c'est-à-dire que l'intersection complète des deux premières appartiendrait à la troisième. Comme la forme des trois équations ne comporte pas ce fait, puisque la troisième ne saurait être une combinaison linéaire des autres, il y a lieu de conclure que pareille circonstance ne peut se présenter.

D'après ce qui vient d'être vu, pour en revenir aux équations (3), lorsque le déterminant Δ est nul identiquement et que celui des coefficients de y et de z dans deux des équations (4) ne l'est pas, on trouvera la droite commune et les points qui sont en outre communs, en posant

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 = u,$$

$$\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2 = v,$$

ou plutôt

$$y = \alpha u + \beta v + \gamma x + \delta,$$

$$z = \alpha' u + \beta' v + \gamma' x + \delta',$$

substituant ces expressions de y et de z dans les deux équations (4) à considérer, puis égalant à zéro les coefficients des différentes puissances de x . Les constantes pourront se déterminer de façon que l'on ait ainsi deux équations homogènes en u et v . La droite commune sera donnée par $u = 0$, $v = 0$, par suite, $y = \gamma x + \delta$, $z = \gamma' x + \delta'$; et l'équation relative aux valeurs particulières de x s'obtiendra en égalant à zéro le déterminant des coefficients de u et de v dans les résultats de la substitution ou celui des coefficients de y et de z dans les premières équations.

Prenons pour exemple les trois équations

$$\begin{aligned} y^2 &= xz, \\ z^2 &= (a' + b' + 2x)\gamma + (b' + x)z + a'x + 2x^2, \\ yz &= -xy - xz - x^2. \end{aligned}$$

Les deux premières équations (4) sont alors

$$\begin{aligned} (a' + b' + 2x)xy + (b' + x)xz + a'x^2 + x^3 &= 0, \\ 2(a' + x)xy + (a' + b' + 2x)xz + (a' - b')x^2 &= 0. \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$\begin{aligned} y &= \alpha u + \beta v + \gamma x + \delta, \\ z &= \alpha' u + \beta' v + \gamma' x + \delta', \end{aligned}$$

on devra avoir

$$\begin{aligned} (a' + b' + 2x)x(\gamma x + \delta) + (b' + x)x(\gamma' x + \delta') + a'x^2 + x^3 &= 0, \\ 2(a' + x)x(\gamma x + \delta) + (a' + b' + 2x)x(\gamma' x + \delta') + (a' + b')x^2 &= 0, \end{aligned}$$

identiquement, d'où

$$\begin{aligned} 2\gamma + \gamma' + 1 &= 0, \\ (a' + b')\gamma + 2\delta + b'\gamma' + \delta' + a' &= 0, \\ (a' + b')\delta + b'\delta' &= 0, \\ 2\gamma + 2\gamma' &= 0, \\ 2\delta + 2a'\gamma + (a' + b')\gamma' + 2\delta' + a' - b' &= 0, \\ 2a'\delta + (a' + b')\delta' &= 0. \end{aligned}$$

Il s'ensuit, supposé $a' \geq b'$, qu'on aura

$$\delta = 0, \quad \delta' = 0, \quad \text{puis} \quad \gamma = -1, \quad \gamma' = 1,$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned} (a' + b' + 2x)x(\alpha u + \beta v) + (b' + x)x(\alpha' u + \beta' v) &= 0, \\ 2(a' + x)x(\alpha u + \beta v) + (a' + b' + 2x)x(\alpha' u + \beta' v) &= 0, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} [(a' + b' + 2x)x + (b' + x)\alpha']xu + [(a' + b' + 2x)\beta + (b' + x)\beta']xv &= 0, \\ [2(a' + x)\alpha + (a' + b' + 2x)\alpha']\alpha u \\ + [2(a' + x)\beta + (a' + b' + 2x)\beta']xv &= 0, \end{aligned}$$

ce qui donne l'équation

$$[(a' + b' + 2x)\alpha + (b' + x)\alpha'] [2(a' + x)\beta + (a' + b' + 2x)\beta'] x^2 \\ - [(a' + b' + 2x)\beta + (b' + x)\beta'] [2(a' + x)\alpha + (a' + b' + 2x)\alpha'] x^2 = 0,$$

ce qui fait

$$[(a' + x)^2 + (b' + x)^2] x^2 (\alpha\beta' - \alpha'\beta) = 0.$$

C'est bien

$$(a' + b' + 2x)^2 - 2(a' + x)(b' + x);$$

de là

$$x^2 = 0 \quad \text{et} \quad a' + x = \pm (b' + x)i, \\ x(1 \mp i) = -a' \pm b'i, \\ x = -\frac{a' + b'}{2} \pm \frac{b' - a'}{2}i.$$

La droite commune a d'ailleurs pour équations

$$y = -x \quad \text{et} \quad z = x.$$

Les équations (4) pourront être incompatibles, en ce que les coefficients de y et de z y soient dans des rapports constants autres que ceux des autres termes. Alors les équations (3) n'auront pas de solution.

Soient les équations (4) se réduisant à une seule par la proportionnalité des termes.

On tirera de cette équation la valeur de y ou de z et on la portera dans l'une des équations (3) : de là, une équation en y ou z du second degré, par suite, pour toute valeur de x , deux couples de valeurs de y et de z , ou, pour les trois surfaces, deux points communs dans tout plan parallèle au plan yz . C'est ce qui peut avoir lieu quand les surfaces ont deux droites communes, et encore quand elles ont une conique commune.

Or, quand deux surfaces du second degré P et Q ont deux droites communes D et D' du même système sur chacune, leur intersection se complète par deux autres droites analogues D_1 et D'_1 d'autre système qui peuvent se confondre. Qu'une troisième surface R contienne D et D' , elle coupera P suivant deux autres droites D_2, D'_2 du système de D_1 et D'_1 , et Q suivant les droites analogues D_3, D'_3 . Les trois surfaces n'auront donc de points communs que sur D et D' , ou bien elles auront avec ces droites une

troisième droite commune les rencontrant, ou bien elles auront avec elles deux autres droites communes. Dans la circonstance qui nous occupe, le premier de ces cas sera le seul possible.

Si les trois surfaces ont une conique commune, les trois équations étant susceptibles d'être

$$P = 0, \quad Q = kP + uv = 0, \quad R = k'P + uw = 0,$$

il y aura, outre la conique commune, deux points communs donnés par $P = 0, v = 0, w = 0$. Les équations (1) et (3) seront telles que, deux à deux, elles donneront, par une combinaison linéaire convenable, le système de deux plans, et, dans les combinaisons, il y aura un plan commun. Par cette voie, ce cas se distinguera immédiatement du précédent. Il est d'ailleurs à observer que, pour chacune des valeurs de x relatives aux points communs en dehors de la conique commune, l'équation du premier degré en y et z deviendra identique, en sorte que ces valeurs résulteront d'un facteur en x commun aux termes de l'équation.

C'est ainsi que, pour

$$\begin{aligned} P &= Ax^2 + y^2 + A''z^2 + D = 0, \\ Q &= Ax^2 + y^2 + A''z^2 + D + 2(y + g)(z + k) = 0, \\ R &= Ax^2 + y^2 + A''z^2 + D + 2(z + h)(z + k) = 0, \end{aligned}$$

on trouve

$$\begin{aligned} yz &= -ky - gz - gk, \\ z^2 &= -(h + k)z - hk, \\ y^2 &= A'(h + k)z - Ax^2 - D + A''hk. \end{aligned}$$

Les trois équations du premier degré sont

$$\begin{aligned} oy + (g^2 + A''h^2 + D + Ax^2)z + k(Ax^2 + D + g^2 + A''h^2) &= 0, \\ oy + oz + o &= 0, \\ oy - (h + k)(g^2 + A''h^2 + D + Ax^2)z - k(h + k)(Ax^2 + D + A''h^2 + g^2) &= 0. \end{aligned}$$

Il n'y a bien là qu'une seule équation

$$(Ax^2 + D + g^2 + A''h^2)(z + k) = 0,$$

d'où le plan de la conique commune par $z + k = 0$, et, pour les deux points communs par ailleurs,

$$Ax^2 + D + g^2 + A''h^2 = 0.$$

Une dernière circonstance est celle où les équations (4) deviennent identiques pour toute valeur de x . Cela arrive quand on a, quelque valeur qui s'attribue à x ,

$$L = 0, L_1 = 0, M = 0, p(cb' - bc') + q(ac' - ca') + v(pq - ab') = 0.$$

Les équations (3) peuvent alors s'écrire

$$(y - q)(y + q - a) = b(z + p - b'),$$

$$(z - p)(z + p - b') = a'(y + q - a),$$

$$(z - p)(y - q) = ba'.$$

Les surfaces représentées par les deux premières équations ont une droite commune que déterminent

$$y + q - a = 0,$$

$$z + p - b' = 0,$$

et tout point appartenant à ces mêmes surfaces en dehors de la droite appartient à la troisième surface. Il y a donc là une cubique commune ayant pour équations

$$(y - q)^2 (y + q - a) = b[(2p - b')(y - q) + ba'],$$

$$z - p = \frac{ba'}{y - q}.$$

II.

Nous avons encore à traiter les équations (1) lorsque les trois déterminants

$$\begin{vmatrix} A' & A'' & B \\ A'_1 & A''_1 & B_1 \\ A'_2 & A''_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A'' & A & B' \\ A''_1 & A_1 & B'_1 \\ A''_2 & A_2 & B'_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A & A' & B'' \\ A_1 & A'_1 & B''_1 \\ A_2 & A'_2 & B''_2 \end{vmatrix}$$

sont nuls à la fois, de sorte que ces équations ne peuvent alors se résoudre par rapport aux carrés et aux produits de deux des inconnues x, y, z .

Nous écarterons d'abord le cas où, les termes du second degré ayant leurs coefficients proportionnels, à prendre les équations deux à deux, on pourra immédiatement, par l'élimination de ces

termes, obtenir deux équations du premier degré en x, y, z ; cela a lieu en particulier pour trois sphères. Il en est ainsi quand les déterminants mineurs relatifs aux déterminants δ sont tous nuls.

Si, dans le déterminant δ , les éléments sont tous nuls, les équations, étant

$$Ax^2 + 2B'xz + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0,$$

$$A_1x^2 + 2B'_1xz + 2B''_1xy + 2C_1x + 2C'_1y + 2C''_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x^2 + 2B'_2xz + 2B''_2xy + 2C_2x + 2C'_2y + 2C''_2z + D_2 = 0,$$

sont du premier degré en y et z ; il s'ensuit alors

$$\begin{vmatrix} B''x + C' & B'x + C'' & Ax^2 + 2Cx + D \\ B''_1x + C'_1 & B'_1x + C''_1 & A_1x^2 + 2C_1x + D_1 \\ B''_2x + C'_2 & B'_2x + C''_2 & A_2x^2 + 2C_2x + D_2 \end{vmatrix} = 0.$$

On aurait une équation analogue pour y si les éléments de δ' étaient nuls, une équation en z si ceux de δ'' l'étaient.

Au cas où les trois coefficients de y^2 , ceux de z^2 , mais non ceux de yz , ne sont pas nuls à la fois, les équations étant

$$Ax^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0,$$

$$A_1x^2 + 2B_1yz + 2B'_1zx + 2B''_1xy + 2C_1x + 2C'_1y + 2C''_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x^2 + 2B_2yz + 2B'_2zx + 2B''_2xy + 2C_2x + 2C'_2y + 2C''_2z + D_2 = 0,$$

on pourra, par deux éliminations de yz , obtenir deux équations du premier degré en y et z ; en y joignant l'une des premières équations contenant yz , on aura un système équivalent, et une équation résultante en x s'ensuivra immédiatement. Pour l'obtenir sous forme d'un déterminant, observons que, en désignant les trois équations par

$$ayz + by + cz + p = 0,$$

$$\alpha y + \beta z + q = 0,$$

$$\alpha'y + \beta'z + r = 0,$$

et y joignant

$$\alpha y^2 + \beta yz + qy = 0,$$

$$\alpha'y^2 + \beta'yz + ry = 0,$$

$$\alpha yz + \beta z^2 + qz = 0,$$

on aura

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & a & b & c & p \\ 0 & 0 & 0 & \alpha & \beta & q \\ 0 & 0 & 0 & \alpha' & \beta' & r \\ \alpha & 0 & \beta & q & 0 & 0 \\ \alpha' & 0 & \beta' & r & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha & 0 & q & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

d'où

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c & p \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & q \\ 0 & 0 & \alpha' & \beta' & r \\ \alpha & \beta & q & 0 & 0 \\ \alpha' & \beta' & r & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

puis

$$- \begin{vmatrix} & a & b & c & p \\ & 0 & \alpha & \beta & q \\ & 0 & \alpha' & \beta' & r \\ -\alpha'\beta + \alpha\beta' & -\alpha'q + \alpha r & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & q \\ \alpha' & \beta' & r \\ \alpha(-\alpha'q + \alpha r) - b(-\alpha'\beta + \alpha\beta') & -(\alpha\beta' - \alpha'\beta)c & -p(-\alpha'\beta + \alpha\beta') \end{vmatrix} = 0,$$

équation du sixième degré en x .

Si les coefficients de yz sont nuls, ainsi que ceux de y^2 ou de z^2 , ceux de z^2 par exemple, les équations étant

$$Ax^2 + A'y^2 + 2B'xz + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0,$$

$$A_1x^2 + \dots + D_1 = 0,$$

$$A_2x^2 + \dots + D_2 = 0,$$

on pourra en déduire deux équations ne contenant pas y^2 , et l'on aura ainsi

$$A'y^2 + ay + bz + p = 0,$$

$$\alpha y + \beta z + q = 0,$$

$$\alpha'y + \beta'z + r = 0,$$

d'où

$$\alpha y^2 + \beta yz + qy = 0,$$

$$\alpha'y^2 + \beta'yz + ry = 0.$$

De là

$$\begin{vmatrix} A' & 0 & a & b & p \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & q \\ 0 & 0 & \alpha' & \beta' & r \\ \alpha & \beta & q & 0 & 0 \\ \alpha' & \beta' & r & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

d'où

$$\begin{vmatrix} A' & a & b & p \\ 0 & \alpha & \beta & q \\ 0 & \alpha' & \beta' & r \\ \beta\alpha' - \alpha\beta' & \beta r - \beta'q & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

puis

$$\begin{vmatrix} & \alpha & \beta & q \\ & \alpha' & \beta' & r \\ A'(\beta r - \beta'q) - a(\beta\alpha' - \alpha\beta') & -b(\beta\alpha' - \alpha\beta') & -p(\beta\alpha' - \alpha\beta') & \end{vmatrix} = 0.$$

Ces premiers cas particuliers ainsi traités, soient les équations (1) au cas où les trois déterminants δ sont nuls, sans que deux colonnes y aient leurs éléments nuls; par exemple, δ étant

$$\text{nul, } \begin{vmatrix} A' & A'' & B \\ A'_1 & A''_1 & B_1 \\ A'_2 & A''_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0; \text{ nous supposerons que dans deux co-}$$

lonnes au moins les éléments ne sont pas nuls. Si cela est pour les deux dernières colonnes, les trois déterminants $A'_1B_2 - A''_2B_1$, $A''B_2 - A'_2B$, $A''B_1 - A'_1B$ pourront ne pas être nuls à la fois. Si l'on multiplie les équations (1) respectivement par ces mineurs, et qu'on ajoute, les termes en y^2 , yz , z^2 disparaîtront, et l'on aura une équation telle, que

$$ax^2 + 2b'xz + 2b''xy + 2cx + 2c'y + 2c''z + d = 0.$$

Il en sera de même si l'on multiplie par $A'_1B_2 - A'_2B_1$, $A'B_2 - A'_2B$, $A'B_1 - A'_1B$, au cas où ces mineurs ne seront pas nuls à la fois, les équations (1) supposées distinctes.

Si ces deux suites de déterminants mineurs sont nulles à la fois

avec $B \geq 0$, on aura

$$A'_1 = A'' \frac{B_1}{B}, \quad A'_2 = A'' \frac{B_2}{B}, \quad A'_3 = A' \frac{B_3}{B}, \quad A'_4 = A'' \frac{B_4}{B}.$$

Qu'on multiplie alors la première équation par $\frac{B_1}{B}$ et qu'on soustraye la seconde, les termes en y^2 , z^2 , yz disparaîtront, et l'on aura une équation de la forme indiquée ci-dessus.

Dans les conditions supposées, on obtiendra de même les équations

$$\begin{aligned} a'_1 y^2 + 2b_1 yz + 2b''_1 xy + 2c_1 x + 2c'_1 y + 2c''_1 z + d_1 &= 0, \\ a''_2 z^2 + 2b_2 yz + 2b'_2 xz + 2c_2 x + 2c'_2 y + 2c''_2 z + d_2 &= 0. \end{aligned}$$

Si les trois équations sont distinctes, qu'aucune d'elles ne puisse se déduire des autres, elles pourront remplacer les premières. C'est ce qui a lieu lorsque les coefficients en a'_1 , a''_2 sont chacun différents de zéro, même lorsqu'un seul d'entre eux est nul.

Les trois équations peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} \alpha y + \alpha' z + p &= 0, \\ a'_1 y^2 + 2b_1 yz + \beta y + \beta' z + q &= 0, \\ a''_2 z^2 + 2b_2 yz + \gamma y + \gamma' z + r &= 0. \end{aligned}$$

Si l'on avait

$$a'_1 = 0 \quad \text{et} \quad a''_2 = 0,$$

les deux dernières équations pourraient devenir équivalentes; il y aurait alors à prendre à la place de l'une d'elles l'une des équations (1).

C'est pourquoi il convient de considérer d'abord les trois équations

$$\begin{aligned} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D &= 0, \\ 2(b''x + c')y + 2(b'x + c'')z + ax^2 + 2cx + d &= 0, \\ 2b_1 yz + 2c'_1 y + 2c''_1 z + 2c_1 x + d_1 &= 0, \end{aligned}$$

b_1 supposé différent de zéro, et le terme yz pouvant, par suite, avoir été éliminé de la première équation. Sous une désignation plus simple, les équations sont

$$\begin{aligned} A'y^2 + A''z^2 + \alpha y + \alpha' z + p &= 0, \\ \beta y + \beta' z + q &= 0, \\ 2b_1 yz + \gamma y + \gamma' z + r &= 0. \end{aligned}$$

Multiplions la seconde par $b_1 y$ et $b_1 z$, nous aurons

$$\begin{aligned}\beta b_1 y^2 + \beta' b_1 yz + q b_1 y &= 0, \\ \beta b_1 yz + \beta' b_1 z^2 + b_1 qz &= 0,\end{aligned}$$

ce qui donne, eu égard à la troisième,

$$\begin{aligned}\beta b_1 y^2 - \beta'(\gamma y + \gamma'z + r) + q b_1 y &= 0, \\ -\beta(\gamma y + \gamma'z + r) + \beta' b_1 z^2 + b_1 qz &= 0,\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}\beta b_1 y^2 + (q b_1 - \beta' \gamma) y - \beta' \gamma' z - \beta' r &= 0, \\ \beta' b_1 z^2 - \beta \gamma y + (b_1 q - \beta \gamma') z - \beta r &= 0.\end{aligned}$$

D'autre part, en multipliant la première équation par βy , on a

$$A' \beta y^3 + A'' \beta yz^2 + \alpha \beta y^2 + \alpha' \beta yz + p \beta y = 0,$$

ce qui se change en

$$-A' y^3 (\beta' z + q) - A'' \frac{\beta z}{b_1} (\gamma y + \gamma' z + r) + \alpha \beta y^2 + \alpha' \beta yz + p \beta y = 0,$$

puis

$$\begin{aligned}A' \beta' y \frac{1}{b_1} (\gamma y + \gamma' z + r) - A' q y^2 - \frac{A'' \beta \gamma}{b_1} yz - A'' \frac{\beta \gamma'}{b_1} z^2 - \frac{A'' \beta r}{b_1} z \\ + \alpha \beta y^2 + \alpha' \beta yz + p \beta y = 0,\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\left(\frac{A' \beta' \gamma}{b_1} - A' q + \alpha \beta\right) y^2 - \frac{A'' \beta \gamma'}{b_1} z^2 + \left(A' \frac{\beta' \gamma'}{b_1} - A'' \frac{\beta \gamma}{b_1} + \alpha' \beta\right) yz \\ + \left(\frac{A' \beta' \gamma'}{b_1} + p \beta\right) y - \frac{A'' \beta r}{b_1} z = 0,\end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned}(A' \beta' \gamma - A' q b_1 + \alpha \beta b_1) y^2 - A'' \beta \gamma' z^2 \\ + \left(A' \beta' r + p b_1 \beta - A' \beta' \gamma' \gamma \frac{1}{b_1} + A'' \beta \gamma^2 \frac{1}{b_1} - \alpha' \beta \gamma\right) y \\ - \left[A'' \beta r + \frac{\gamma'}{b_1} (A' \beta' \gamma' - A'' \beta \gamma + \alpha' \beta b_1)\right] z \\ - \frac{r}{b_1} (A' \beta' \gamma' - A'' \beta \gamma + \alpha' \beta b_1) = 0.\end{aligned}$$

Les cinq équations que nous venons d'obtenir en y^2 , z^2 , y et z

donnent finalement

$$\begin{vmatrix} A' & A'' & \alpha & \alpha' & p \\ 0 & 0 & \beta & \beta' & q \\ \beta b_1 & 0 & qb_1 - \beta'\gamma & -\beta'\gamma' & -\beta'r \\ 0 & \beta'b & -\beta\gamma & b_1q - \beta\gamma' & -\beta r \\ u & -A''\beta\gamma' & u' & u'' & u''' \end{vmatrix} = 0,$$

en posant

$$u = A'(\beta'\gamma - b_1q) + \alpha\beta b_1,$$

$$u' = A'\beta' \left(r - \frac{\gamma'\gamma}{b_1} \right) + A''\beta\gamma^2 \frac{1}{b_1} + \beta(b_1p - \alpha'\gamma),$$

$$u'' = -A''\beta r - \frac{\gamma'}{b_1} (A'\beta'\gamma' - A''\beta\gamma + \alpha'\beta b_1),$$

$$u''' = -\frac{r}{b_1} (A'\beta'\gamma' - A''\beta\gamma + \alpha'\beta b_1),$$

équation du huitième degré, en général, où le coefficient de x^8 est

$$\begin{aligned} b_1^3 \{ & -A'A''a^4 + 4(A''B''b'' + A'B'b')a^3 \\ & - 4[A(A'b'^2 + A''b''^2) + 4b'b''B'B'']a^2 \\ & + 16b'b''(b'B'' + b''B')aA - 16b'^2b''^2A^2 \}. \end{aligned}$$

On peut obtenir l'équation avec des éléments simples sous la forme d'un déterminant du neuvième ordre.

Le cas particulier de $a'_1 = 0$ mérite encore d'être traité à part. Les équations étant

$$2(b''x + c')y + 2(b'x + c'')z + ax^2 + 2cx + d = 0,$$

$$2b_1yz + 2(b'_1x + c'_1)y + 2c''_1z + 2c_1x + d_1 = 0,$$

$$a''_1z^2 + 2b_1yz + 2(b'_1x + c'_1)z + 2c'_2y + 2c_2x + d_2 = 0,$$

désignons-les par

$$\alpha y + \alpha' z + p = 0,$$

$$2b_1yz + \beta y + \beta' z + q = 0,$$

$$a''_1z^2 + 2b_1yz + \gamma y + \gamma' z + r = 0.$$

On en déduit

$$\alpha y^2 + \alpha' yz + py = 0,$$

$$\alpha yz + \alpha' z^2 + pz = 0,$$

$$\alpha y^2z + \alpha' yz^2 + pyz = 0,$$

et, d'autre part,

$$2b_1yz^2 + \beta yz + \beta'z^2 + qz = 0,$$

$$a_2''z^2y + 2b_2y^2z + \gamma y^2 + \gamma'yz + ry = 0,$$

d'où

$$-2b_12b_2y^2z - 2b_1\gamma y^2 + a_2''\beta'z^2 + (a_2''\beta - 2b_1\gamma')yz - 2b_1ry + a_2''qz = 0,$$

$$-2b_12b_2yz^2 - 2b_2\beta yz - 2b_2\beta'z^2 - 2b_2qz = 0,$$

par suite,

$$2b_12b_2pyz - 2b_1\alpha\gamma y^2 + (a_2''\alpha\beta' - 2b_2\alpha'\beta')z^2 \\ + (a_2''\beta\alpha - 2b_1\gamma'\alpha - 2b_2\beta\alpha')yz - 2b_1r\alpha y + (a_2''q\alpha - 2b_2q\alpha')z = 0,$$

ou

$$-2b_1\alpha\gamma y^2 + (a_2''\alpha - 2b_2\alpha')\beta'z^2 \\ + (a_2''\alpha\beta - 2b_1\alpha\gamma' - 2b_2\alpha'\beta + 2b_12b_2p)yz \\ - 2b_1r\alpha y + (a_2''\alpha - 2b_2\alpha')qz = 0.$$

Il y a là six équations d'où résulte

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha & \alpha' & p \\ 0 & 0 & 2b_1 & \beta & \beta' & q \\ 0 & a_2'' & 2b_2 & \gamma & \gamma' & r \\ \alpha & 0 & \alpha' & p & 0 & 0 \\ 0 & \alpha' & \alpha & 0 & p & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$-2b_1\alpha\gamma \quad (a_2''\alpha - 2b_2\alpha')\beta' \quad (a_2''\beta - 2b_1\gamma')\alpha - 2b_2\alpha'\beta + 2b_12b_2p \quad -2b_1r\alpha \quad (a_2''\alpha - 2b_2\alpha')q \quad 0$$

ce qui peut se réduire, suppression faite du facteur α , à

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha & \alpha' & p \\ 0 & 2b_1 & \beta & \beta' & q \\ a_2'' & 2b_2 & \gamma & \gamma' & r \\ \alpha' & \alpha & 0 & p & 0 \\ a_2''\alpha - 2b_2\alpha'\beta' & a_2''\alpha\beta - 2b_1\alpha\gamma' + 2b_2\alpha'\gamma - 2b_2\alpha'\beta + 2b_12b_2p & 2b_1p\gamma - 2b_1r\alpha & (a_2''\alpha - 2b_2\alpha')q & 0 \end{vmatrix}.$$

Les termes du degré le plus élevé sont là du septième et proviennent de

$$(a_2''\alpha\beta - 2b_1\alpha\gamma' - 2b_2\alpha'\beta + 2b_12b_2p)\alpha'\beta\gamma'p,$$

ce qui donne

$$x^7(a_2''b''b_1'' - 2b_1b''b_2' - 2b_2b'b_1'' + 2b_12b_2a)b'b_1''b_2'a.$$

En cas de $a''_2 = 0$, cette équation peut se réduire, suppression faite de α' , à

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha & \alpha' & p \\ 2b_1 & \beta & \beta' & q \\ 2b_2 & \gamma & \gamma' & r \\ 2b_2\alpha\beta' - 2b_1\alpha\gamma' + 2b_1\alpha'\gamma - 2b_2\alpha'\beta + 2b_1 2b_2 p & 2b_1 p\gamma - 2b_1 r\alpha & 2b_2\beta'p - 2b_2\alpha'q & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ou à

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha & \alpha' & p \\ 2b_1 & \beta & \beta' & q \\ 2b_2 & \gamma & \gamma' & r \\ 2b_1(\alpha'\gamma - \alpha\gamma') + 2b_2(\alpha\beta' - \alpha'\beta) + 2b_1 2b_2 p & 2b_1(p\gamma - r\alpha) & 2b_2(\beta'p - \alpha'q) & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

le terme du plus haut degré γ est

$$ab''_1 b'_1 (-2b_1 b''b'_2 - 2b_2 b'b'_1 + 2b_1 2b_2 \alpha) x^3.$$

Remarque. — Quand on fait $b_1 = 0$ dans l'équation due, plus haut, à l'élimination de $\gamma^2 z$ et γz^2 , on obtient

$$(a''_2 \alpha - 2b_2 \alpha')(\beta \gamma z + \beta' z^2 + qz) = 0;$$

or, l'équation résultante pour les équations

$$\alpha \gamma + \alpha' z + p = 0,$$

$$\beta \gamma + \beta' z + q = 0,$$

$$\alpha''_2 z^2 + 2b_2 \gamma z + \gamma \gamma + \gamma' z + r = 0$$

peut s'obtenir en y joignant

$$\alpha \gamma^2 + \alpha' \gamma z + p \gamma = 0,$$

$$\alpha \gamma z + \alpha' z^2 + p z = 0$$

et

$$\beta \gamma z + \beta' z^2 + q z = 0.$$

L'équation précédente, sauf à en dégager le facteur $a''_2 \alpha - 2b_2 \alpha'$, peut donc, quand on y fait $b_1 = 0$, s'appliquer à cette circonstance.

Mais, plus simplement, l'équation résultante est alors

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha & \alpha' & p \\ 0 & 0 & 0 & \beta & \beta' & q \\ 0 & a_2'' & 2b_2 & \gamma & \gamma' & r \\ \alpha & 0 & \alpha' & p & 0 & 0 \\ 0 & \alpha' & \alpha & 0 & p & 0 \\ 0 & \beta' & \beta & 0 & q & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

c'est, en écartant le facteur α ,

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha & \alpha' & p \\ 0 & 0 & \beta & \beta' & q \\ a_2'' & 2b_2 & \gamma & \gamma' & r \\ \alpha' & \alpha & 0 & p & 0 \\ \beta' & \beta & 0 & q & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

En prenant l'équation

$$\beta y^2 + \beta' yz + qy = 0$$

au lieu de

$$\beta yz + \beta' z^2 + qz = 0,$$

on a

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \alpha & \alpha' & p \\ 0 & 0 & 0 & \beta & \beta' & q \\ \alpha & 0 & \alpha' & p & 0 & 0 \\ 0 & \alpha' & \alpha & 0 & p & 0 \\ \beta & 0 & \beta' & q & 0 & 0 \\ 0 & a_2'' & 2b_2 & \gamma & \gamma' & r \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha & \alpha' & p \\ 0 & 0 & \beta & \beta' & q \\ 0 & \alpha\beta' - \alpha'\beta & \alpha'q - \beta p & 0 & 0 \\ \alpha' & \alpha & 0 & p & 0 \\ a_2'' & 2b_2 & \gamma & \gamma' & r \end{vmatrix} = 0,$$

d'où

$$\begin{vmatrix} 0 & \alpha & \alpha' & p \\ 0 & \beta & \beta' & q \\ \alpha\beta' - \alpha'\beta & \alpha'q - \beta p & 0 & 0 \\ -a_2''\alpha + 2b_2\alpha' & \alpha'\gamma & -a_2''p + \alpha'\gamma' & \alpha'r \end{vmatrix} = 0,$$

puis

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & p \\ \beta & \beta' & q \\ (\alpha q - \beta p)(a_2''\alpha - 2b_2\alpha') + a'\gamma(\alpha\beta' - \alpha'\beta) & (-a_2''p + \alpha'\gamma')(\alpha\beta' - \alpha'\beta) & \alpha'r(\alpha\beta' - \alpha'\beta) \end{vmatrix} = 0,$$

déterminant qui s'annule pour $\alpha' = 0$, de sorte que $\alpha'y$ est encore un facteur à supprimer.

Le résultat qui s'ensuit s'obtient plus simplement en résolvant, par rapport à y et à z , les deux premières équations de la question et substituant leurs valeurs dans la troisième. De même, au cas de $b_2 = 0$, l'équation résultante devient

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha & \alpha' & p \\ 0 & 2b_1 & \beta & \beta' & q \\ a_2'' & 0 & \gamma & \gamma' & r \\ \alpha' & \alpha & 0 & p & 0 \\ a_2''\alpha\beta & a_2''\alpha\beta - 2b_1\alpha\gamma' + 2b_1\alpha'\gamma & 2b_1p\gamma - 2b_1r\alpha & a_2''\alpha q & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

équation où le terme du septième degré est

$$x^7(a_2''b''b_1'' - 2b_1b''b_2'')b'b_1'b_2'a.$$

Si b_1 et b_2 sont nuls, suppression opérée de $a_2''\alpha$, on a

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha & \alpha' & p \\ 0 & 0 & \beta & \beta' & q \\ a_2'' & 0 & \gamma & \gamma' & r \\ \alpha' & \alpha & 0 & p & 0 \\ \beta' & \beta & 0 & q & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui peut se réduire à

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & p \\ \beta & \beta' & q \\ -\gamma(\alpha\beta' - \beta\alpha') & -\gamma'(\alpha\beta' - \alpha'\beta) + a_2''(-p\beta + q\alpha) & -r(\alpha\beta' - \beta\alpha') \end{vmatrix} = 0.$$

Soient enfin les trois équations

$$\alpha y + \alpha' z + p = 0,$$

$$a_1'y^2 + 2b_1yz + \beta y + \beta'z + q = 0,$$

$$a_2''z^2 + 2b_2yz + \gamma y + \gamma'z + r = 0,$$

au cas de $a_1'a_2'' \geq 0$.

Multiplions la première par $a'_1\gamma$, et dans le produit remplaçons $a'_1\gamma^2$ par sa valeur tirée de la seconde; nous aurons

$$(-2b_1\alpha + a'_1\alpha')yz + (-\alpha\beta + pa'_1)\gamma - \alpha\beta'z - \alpha q = 0.$$

En multipliant la même équation par a''_2z , et tenant compte de la valeur de a''_2z^2 , on a

$$(-2b_2\alpha' + a''_2\alpha)yz - \alpha'\gamma\gamma + (-\alpha'\gamma' + a''_2p)z - \alpha'r = 0.$$

En prenant yz pour facteur, on obtient d'abord

$$\alpha\gamma^2z + \alpha'\gamma z^2 + pyz = 0.$$

Mais on a, par les deux autres équations,

$$a'_1\gamma^2z + 2b_1\gamma z^2 + \beta yz + \beta'z^2 + qz = 0,$$

$$2b_2\gamma^2z + a''_2\gamma z^2 + \gamma\gamma^2 + \gamma'yz + ry = 0,$$

d'où l'on tire

$$(a'_1a''_2 - 2b_12b_2)\gamma^2z + (\beta a''_2 - 2b_1\gamma')yz - 2b_1\gamma\gamma^2 + a''_2\beta'z^2 - 2b_1ry + a''_2qz = 0,$$

$$(a'_1a''_2 - 2b_12b_2)\gamma z^2 + (a'_1\gamma' - 2b_2\beta)yz + a'_1\gamma\gamma^2 - 2b_2\beta'z^2 + a'_1ry - 2b_2qz = 0.$$

L'élimination de γ^2z et γz^2 conduit à

$$\begin{aligned} & \left[\alpha(a''_2\beta - 2b_1\gamma') + \alpha'(a'_1\gamma' - 2b_2\beta') - (a'_1a''_2 - 2b_12b_2)p \right. \\ & \quad \left. - \frac{2b_1}{a'_1}\gamma(-2b_1\alpha + a'_1\alpha') - \frac{2b_2}{a''_2}\beta'(-2b_2\alpha' + a''_2\alpha) \right] yz \\ & + \left[(-2b_1\alpha + a'_1\alpha')r - \frac{\beta}{a'_1}\gamma(-2b_1\alpha + a'_1\alpha') \right. \\ & \quad \left. - \frac{\beta'}{a''_2}\gamma(-2b_2\alpha' + a''_2\alpha) \right] y \\ & + \left[(-2b_2\alpha' + a''_2\alpha)q - \frac{\beta'}{a'_1}\gamma(-2b_1\alpha + a'_1\alpha') \right. \\ & \quad \left. - \frac{\beta}{a''_2}\gamma'(-2b_2\alpha' + a''_2\alpha) \right] z \\ & - \frac{\gamma}{a'_1}q(-2b_1\alpha + a'_1\alpha') - \frac{\beta'}{a''_2}r(-2b_2\alpha' + a''_2\alpha) = 0. \end{aligned}$$

Par les quatre équations en yz , y et z ainsi obtenues, on a pour

équation résultante

$$\begin{vmatrix} \theta & \alpha & \alpha' & p \\ u_1 & u_2 & u'_1 & u'_2 \\ v_1 & v'_1 & v_2 & v'_2 \\ w_2 & w'_2 & w''_2 & w'''_2 \end{vmatrix} = 0,$$

en posant

$$\begin{aligned} u_1 &= -2b_1\alpha + a'_1\alpha', & u_2 &= -\alpha\beta + a'_1p, & u'_1 &= -\alpha\beta', & u'_2 &= -\alpha q, \\ v_1 &= -2b_2\alpha' + a''_2\alpha, & v'_1 &= -\alpha'\gamma, & v_2 &= -\alpha'\gamma' + a''_2p, & v'_2 &= -\alpha'r, \\ w_2 &= -(a'_1a''_2 - 2b_12b_2)p + (a''_2\beta - 2b_1\gamma')\alpha \\ &\quad + (a'_1\gamma' - 2b_2\beta')\alpha' - \frac{2b_1}{a'_1}\gamma u_1 - \frac{2b_2}{a''_2}\beta'v_1, \\ w'_2 &= u_1r - \gamma\left(\frac{u_1}{a'_1}\beta + \frac{v_1}{a''_2}\beta'\right), \\ w''_2 &= v_1q - \beta'\left(\frac{u_1}{a'_1}\gamma + \frac{v_1}{a''_2}\gamma'\right), \\ w'''_2 &= -\frac{u_1}{a'_1}\gamma q - \frac{v_1}{a''_2}\beta'r. \end{aligned}$$

Les termes en x^3 dans l'équation ne proviennent que de $pu_2v_2w_2$; leur ensemble est

$$\begin{aligned} &x^3 a(-4b''b'_1 + aa'_1)(-4b'b'_2 + aa''_2) \\ &\quad \times \left[-a(a'_1a''_2 - 2b_12b_2) \right. \\ &\quad \quad + 2b'(a'_12b'_2 - 2b_22b'_1) + 2b''(a''_22b''_1 - 2b_12b'_2) \\ &\quad \quad \left. - \frac{2b_1}{a'_1}2c'_2(-2b_12b'' + a'_12b') - \frac{2b_2}{a''_2}2c'_1(-2b_22b' + a''_22b') \right]. \end{aligned}$$

On aura y et z , en général du moins, par

$$\begin{aligned} &\alpha y + \alpha'z + p = 0, \\ &[(-\alpha\beta + pa'_1)v_1 + \alpha'\gamma u_1]y + [-\alpha\beta'v_1 - (\alpha'\gamma' + pa''_2)u_1]z \\ &\quad - \alpha qv_1 + \alpha'ru_1 = 0. \end{aligned}$$

Les circonstances de discussion seraient analogues à celles que nous avons présentées dans la première Partie, mais avec plus de complication.

Détermination du nombre des arrangements complets où les éléments consécutifs satisfont à des conditions données; par
M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

(Séance du 13 décembre 1878.)

I. — Introduction.

1. Les arrangements complets de m objets n à n sont, comme on le sait, les groupes qu'on obtient en plaçant sur une même ligne, les uns à la suite des autres et de toutes les manières possibles, n des m objets donnés, un même objet pouvant entrer plusieurs fois dans un même groupe, et deux groupes différant entre eux soit par les objets qu'ils contiennent, soit par l'ordre où ces objets s'y succèdent.

Les objets dont nous parlons constituent les *éléments* des groupes et sont de nature quelconque. Ils peuvent être, par exemple, des lettres de l'alphabet. Quels qu'ils soient, le nombre des arrangements complets de m lettres n à n est égal à m^n .

Nous ne rappellerons point ici le procédé très-simple et très-connu qui conduit à ce résultat, le présent Mémoire ayant uniquement pour but la résolution des problèmes particuliers contenus dans l'énoncé général suivant :

Parmi les m^n arrangements complets de m objets n à n , combien y en a-t-il où les éléments consécutifs satisfont à des conditions données?

2. Ces problèmes particuliers sont en nombre infini, car les conditions données peuvent présenter une variété inépuisable. Ils sont difficiles, ou, du moins, réputés tels. Nous exposons d'abord une méthode générale qui permet de les résoudre tous, quelque compliqués qu'en soient les énoncés, d'une manière uniforme et simple.

A cause même de sa pleine généralité, cette méthode, pour être bien comprise, demande à être appliquée à de nombreux exemples.

Le premier problème auquel nous l'appliquions est celui-ci :

Avec un alphabet contenant v voyelles et c consonnes, combien peut-on former de mots de n lettres où il n'y ait jamais consécutivement plus de deux voyelles ni de deux consonnes?

Ce problème rentre évidemment dans notre énoncé général. Il en est de même du suivant :

Avec v notes distinctes, combien peut-on former de phrases musicales différentes présentant une durée déterminée et dans lesquelles chaque temps ne subisse que des divisions d'un certain ordre?

Le troisième problème considéré par nous ne rentre point aussi visiblement dans notre énoncé général [1]. Au fond, toutefois, il s'y ramène, et notre méthode lui est parfaitement applicable. C'est le problème que voici :

Sur un damier présentant une largeur de c cases et une profondeur indéfinie, par combien de chemins différents un pion qui ne recule jamais et qui part d'une case donnée peut-il arriver à une autre case donnée?

On connaît la difficulté proverbiale des problèmes sur le cavalier du jeu d'échecs. Notre méthode néanmoins s'applique très-bien à celui-ci :

Sur un échiquier présentant une largeur de c cases et une profondeur indéfinie, par combien de chemins différents un cavalier qui ne recule jamais et qui part d'une case donnée peut-il arriver à une autre case donnée?

Ces quatre problèmes, résolus facilement par notre méthode générale, suffisent, croyons-nous, à en montrer la commodité et l'importance. Nous nous bornons donc à ces quatre applications, et nous terminons par quelques réflexions sur la méthode en analyse combinatoire.

II. — Méthode générale de résolution des problèmes considérés.

3. Rappelons d'abord notre énoncé général [1] :

Parmi les m^n arrangements complets de m objets n à n , combien y en a-t-il où les éléments consécutifs satisfont à des conditions données ?

Puis, supposons formés tous ces arrangements dont on demande le nombre, et désignons ce nombre lui-même par X_n .

4. Évidemment, les conditions données nous fournissent le moyen de classer en différentes espèces les parties terminales de nos X_n arrangements, et, par conséquent, ces X_n arrangements eux-mêmes. Cette classification est le premier fondement de notre méthode.

Supposons qu'elle soit effectuée, c'est-à-dire que nos X_n arrangements soient ainsi distribués en différentes espèces, et désignons par A_n le nombre des arrangements de la première espèce, par B_n le nombre de ceux de la deuxième, par C_n le nombre de ceux de la troisième, et ainsi de suite. Nous aurons

$$X_n = A_n + B_n + C_n + \dots,$$

et le calcul du nombre X_n sera ramené à celui des nombres A_n , B_n , C_n ,

5. Pour déterminer ceux-ci, revenons aux conditions données. Quelles qu'elles soient, elles fournissent, pour les nombres A_n , B_n , C_n , ..., des équations liant chacun d'eux aux nombres A_{n-1} , B_{n-1} , C_{n-1} , ..., A_{n-2} , B_{n-2} , C_{n-2} , ..., A_{n-3} , B_{n-3} , C_{n-3} , ..., etc. Dans la presque totalité des cas, ces équations ne contiennent, outre A_n , B_n , C_n , ..., que les nombres A_{n-1} , B_{n-1} , C_{n-1} , Dans des cas exceptionnels, comme le problème [2] sur le cavalier du jeu d'échecs, on est obligé de prendre aussi A_{n-2} , B_{n-2} , C_{n-2} , ...; mais il n'arrive pour ainsi dire jamais qu'il faille aller jusqu'aux nombres A_{n-3} , B_{n-3} , C_{n-3} , ..., ni, *a fortiori*, aux nombres antérieurs.

Quoi qu'il en soit, si nous appelons λ le nombre des espèces de

nos arrangements, les conditions données entre les éléments consécutifs nous fournissent λ équations reliant les nombres cherchés $A_n, B_n, C_n, \dots$ aux nombres analogues correspondant aux précédentes valeurs de n .

6. Entre ces λ équations et celles qu'on en peut déduire en faisant varier n , séparons les nombres $A, B, C, \dots$, c'est-à-dire effectuons les éliminations nécessaires pour obtenir, à la place de ces équations, des équations nouvelles, telles que chacune d'elles ne renferme que des nombres A , ou des nombres B , ou des nombres C , etc.

L'équation ne contenant que des nombres A exprime la loi d'une suite récurrente dont A_n constitue le terme général. De même pour celles qui ne renferment que des nombres B , que des nombres C , et ainsi de suite.

7. Ainsi A_n est le terme général d'une certaine suite récurrente dont on connaît la loi. Comme on peut toujours calculer directement les premiers termes de cette suite, on peut, en se fondant sur la théorie des suites récurrentes, parvenir à l'expression générale de A_n . Par des procédés identiques, on arrivera à celle de B_n , à celle de C_n , etc.

Il va sans dire que, dans le cours de ces calculs, on profitera de toutes les simplifications qui se pourront présenter, et que, les expressions de $A_n, B_n, C_n, \dots$ une fois obtenues, il suffira de les ajouter pour avoir X_n , c'est-à-dire pour obtenir la solution même du problème considéré.

8. En résumé, notre méthode se réduit aux quatre opérations suivantes, dont les deux premières sont purement combinatoires et les deux dernières purement algébriques :

Tirer des conditions relatives aux éléments consécutifs un mode de classification des arrangements dont on cherche le nombre;

Déduire de ces mêmes conditions les équations qui donnent $A_n, B_n, C_n, \dots$ en fonction des nombres analogues correspondant aux précédentes valeurs de n ;

Entre ces équations et celles qu'on en déduit en faisant varier

n, séparer, par une suite d'éliminations, les nombres inconnus *A*, *B*, *C*, ...;

Enfin, déterminer les expressions respectives de A_n, B_n, C_n, ... et les ajouter.

9. Nous allons appliquer, et d'une façon absolument littérale, cette méthode générale à la résolution des quatre problèmes que nous avons déjà énoncés [2].

III. — Problème sur l'alphabet.

10. *Avec un alphabet contenant *v* voyelles et *c* consonnes, combien peut-on former de mots de *n* lettres où il n'y ait jamais consécutivement plus de deux voyelles ni de deux consonnes ?*

Tel est le premier problème énoncé par nous. Il rentre évidemment dans notre énoncé général [1], et, par suite, notre méthode générale lui est applicable. Cette application, comme nous l'allons voir, présente une simplification remarquable qui, d'ailleurs, se rencontre très-fréquemment et que l'on peut, pour ainsi dire, faire naître à volonté.

11. Supposons formés tous les mots de *n* lettres dont nous cherchons le nombre, et, par la considération des conditions données, d'une part, des lettres qui terminent ces mots d'autre part, tâchons de les classer.

Nous trouvons que ces mots sont de quatre espèces différentes :

- 1° Ceux qui finissent par une voyelle unique;
- 2° Ceux qui finissent par deux voyelles consécutives;
- 3° Ceux qui finissent par une consonne unique;
- 4° Ceux qui finissent par deux consonnes consécutives.

Appelons V'_n , V''_n , C'_n , C''_n les nombres de mots respectivement compris dans ces quatre espèces; désignons par X_n le nombre total des mots cherchés. Nous avons

$$X_n = V'_n + V''_n + C'_n + C''_n,$$

et nous serions conduits à calculer V'_n , V''_n , C'_n , C''_n , n'était la simplification annoncée.

12. Continuant à appliquer notre méthode générale, cherchons les équations qui lient les nombres V'_n, V''_n, C'_n, C''_n aux nombres $V'_{n-1}, V''_{n-1}, C'_{n-1}, C''_{n-1}$.

Les mots de n lettres finissant par une voyelle unique se déduisent évidemment des mots de $n-1$ lettres finissant soit par une, soit par deux consonnes. Il suffit, pour obtenir ceux-là, d'écrire à la suite de ceux-ci, successivement, une à une, les ν voyelles données. De là cette relation

$$V'_n = (C'_{n-1} + C''_{n-1})\nu.$$

Chaque mot de n lettres finissant par deux voyelles s'obtient évidemment par l'adjonction d'une des ν voyelles données à la suite d'un mot de $n-1$ lettres finissant par une voyelle unique. Donc

$$V''_n = V'_{n-1}\nu.$$

En raisonnant de la même façon sur les mots terminés par une ou par deux consonnes, on trouve les deux nouvelles relations

$$C'_n = (V'_{n-1} + V''_{n-1})c,$$

$$C''_n = C'_{n-1}c,$$

qui, jointes aux précédentes, forment un nombre d'équations égal au nombre des espèces de notre classification.

13. A l'aide d'un calcul fort aisé, nous tirons de ces quatre équations les quatre relations nouvelles

$$V'_n = \nu c V'_{n-2} + \nu c (\nu + c) V'_{n-3} + (\nu c)^2 V'_{n-4},$$

$$V''_n = \nu c V''_{n-2} + \nu c (\nu + c) V''_{n-3} + (\nu c)^2 V''_{n-4},$$

$$C'_n = \nu c C'_{n-2} + \nu c (\nu + c) C'_{n-3} + (\nu c)^2 C'_{n-4},$$

$$C''_n = \nu c C''_{n-2} + \nu c (\nu + c) C''_{n-3} + (\nu c)^2 C''_{n-4}.$$

Ces relations, où V', V'', C', C'' sont séparés, montrent que ces nombres sont chacun le terme général d'une série récurrente proprement dite.

Il se trouve que ces quatre séries récurrentes ont des lois identiques, et cette particularité, origine de la simplification annoncée [10], nous dispense de calculer isolément V'_n, V''_n, C'_n, C''_n et nous permet d'obtenir immédiatement X_n .

14. En effet, ajoutons membre à membre nos quatre dernières équations, en nous rappelant l'égalité fondamentale

$$X_n = V_n + V_n'' + C_n + C_n'';$$

nous trouvons aussitôt

$$X_n = \nu c X_{n-2} + \nu c (\nu + c) X_{n-3} + (\nu c)^2 X_{n-4}.$$

Le nombre X_n est donc le terme général d'une série récurrente proprement dite, dont l'équation génératrice est l'équation du quatrième degré

$$x^4 - \nu c x^2 - \nu c (\nu + c) x - (\nu c)^2 = 0.$$

Comme nous ne connaissons point les racines de cette équation, nous ne pouvons appliquer, pour écrire l'expression générale de X_n , les règles de Lagrange, lesquelles supposeraient cette équation résolue. Nous recourrons donc aux règles que nous avons précédemment données pour écrire le terme général d'une série récurrente en fonction, non plus des racines, mais, ce qui est infiniment plus commode, des coefficients de l'équation génératrice.

Ces règles pourraient nous conduire à plusieurs expressions de X_n ; nous n'en donnerons qu'une.

15. Posons, conformément à ces règles,

$$\begin{aligned} X_1 &= x_1, \\ X_2 &= x_2, \\ X_3 &= x_3 + \nu c X_1, \\ X_4 &= x_4 + \nu c X_2 + \nu c (\nu + c) X_1. \end{aligned}$$

Le nombre cherché X_n sera donné par la formule

$$X_n = x_1 \Psi(n, 1) + x_2 \Psi(n, 2) + x_3 \Psi(n, 3) + x_4 \Psi(n, 4),$$

dans laquelle x_1, x_2, x_3, x_4 , qu'on peut aisément calculer, ont pour valeurs respectives $\nu + c$, $(\nu + c)^2$, $2\nu c (\nu + c)$ et $2(\nu c)^2$, et où $\Psi(n, i)$ est fourni, pour chaque valeur de i , par l'égalité

$$\Psi(n, i) = \sum \frac{(\beta + \gamma + \delta)!}{\beta! \gamma! \delta!} (\nu + c)^i (\nu c)^{\beta + \gamma + \delta},$$

le signe $\sum$ s'étendant, pour les entiers β, γ, δ , à tous les systèmes
VII.

de valeurs positives ou nulles qui satisfont à la condition

$$2\beta + 3\gamma + 4\delta = n - i.$$

Telle est l'expression générale de X_n .

IV. — Problème sur la musique.

16. *Avec ν notes distinctes, combien peut-on former de phrases musicales différentes présentant une durée déterminée et dans lesquelles chaque temps ne subisse que des divisions d'un certain ordre ?*

Avant d'aborder la résolution de ce très-intéressant problème, nous ferons remarquer que l'on peut toujours le ramener au cas où les temps ne sont point divisés. Si les temps étaient partagés, par exemple, en moitiés, en tiers ou en quarts, on pourrait prendre une moitié, un tiers ou un quart de temps pour unité de durée. En d'autres termes, nous pouvons toujours supposer la durée totale de la phrase partagée en un certain nombre de petites durées, toutes égales entre elles, et remplir chacune entièrement par un élément musical unique ; rien ne nous empêche d'appeler chacune de ces petites durées *un temps*.

En conséquence, nous pouvons, sans restreindre la généralité de notre présent problème, en mettre l'énoncé sous cette nouvelle forme :

Avec ν notes distinctes, combien peut-on former de phrases musicales différentes, de n temps non divisés ?

17. A chacun de ces nouveaux temps correspondra, comme nous venons de le dire, un élément unique. Donc chacune de nos phrases sera un groupe de n éléments.

Ces éléments, d'ailleurs, seront évidemment de trois sortes : *note articulée, silence, prolongation*.

La note articulée sera l'une quelconque des ν notes données ; elle pourra se placer après un élément quelconque.

Le silence pourra aussi se mettre après tout élément.

La prolongation pourra suivre une note articulée ou une pro-

longation, mais ne devra jamais suivre un silence, un silence prolongé ne différant point, en effet, d'un silence répété; il y aurait double emploi.

18. Ces explications données, supposons formées toutes les phrases musicales qu'on nous demande et désignons-en le nombre par X_n .

Ces phrases sont de trois sortes, puisque leur dernier élément, qui occupe par hypothèse le $n^{\text{ième}}$ rang, est une note articulée, un silence ou une prolongation.

Nous désignerons par A_n le nombre des phrases de n éléments qui finissent par une note articulée; nous appellerons S_n le nombre de celles qui finissent par un silence, et P_n le nombre de celles qui finissent par une prolongation.

19. Conformément à notre méthode générale, nous venons de classer nos phrases de n éléments. Il nous reste, pour transformer notre problème en une simple question de calcul, à trouver les équations qui relient les nombres A_n, S_n, P_n , dont la somme est X_n , aux nombres précédents $A_{n-1}, S_{n-1}, P_{n-1}$.

Évidemment, on obtiendra toutes les phrases de n éléments terminées par une note articulée en faisant suivre successivement de chacune des ν notes données toutes les phrases de $n - 1$ éléments. De là cette première équation

$$A_n = (A_{n-1} + S_{n-1} + P_{n-1})\nu.$$

De même, on obtiendra toutes les phrases de n éléments finissant par un silence en plaçant un silence après toutes les phrases de $n - 1$ éléments. De là cette deuxième équation

$$S_n = A_{n-1} + B_{n-1} + C_{n-1}.$$

Enfin, pour former toutes les phrases de n éléments terminées par une prolongation, il suffira d'écrire une prolongation à la suite de chacune des phrases de $n - 1$ éléments finissant soit par une note articulée, soit par une prolongation. De là cette troisième équation.

$$P_n = A_{n-1} + P_{n-1}.$$

Nous possédons ainsi trois relations entre les nombres A_n, S_n, P_n et les nombres $A_{n-1}, S_{n-1}, P_{n-1}$.

20. De ces relations et de celles qu'on en déduit en faisant varier n on tire, par un calcul facile, les trois relations nouvelles

$$A_n - (\nu + 2) A_{n-1} + A_{n-2} = 0,$$

$$S_n - (\nu + 2) S_{n-1} + S_{n-2} = 0,$$

$$P_n - (\nu + 2) P_{n-1} + P_{n-2} = 0,$$

qui nous permettraient de déterminer les expressions respectives des nombres A_n, S_n, P_n .

Grâce à l'identité de ces relations, nous sommes dispensés de cette détermination. En les ajoutant membre à membre, nous trouvons immédiatement

$$X_n - (\nu + 2) X_{n-1} + X_{n-2} = 0,$$

et nous voyons que X_n est le terme général d'une série récurrente proprement dite, dont l'équation génératrice est évidemment

$$x^2 - (\nu + 2)x + 1 = 0.$$

21. En appliquant à ces derniers résultats le procédé de Lagrange, nous trouvons, pour l'expression générale de X_n ,

$$X_n = t_1 R_1^n + t_2 R_2^n,$$

R_1 et R_2 étant les racines de l'équation génératrice qui précède [20], et t_1 et t_2 des coefficients indépendants de n , satisfaisant aux équations

$$t_1 R_1 + t_2 R_2 = X_1, \quad t_1 R_1^2 + t_2 R_2^2 = X_2,$$

dans lesquelles on a, comme on peut le voir directement,

$$X_1 = \nu + 1, \quad X_2 = \nu^2 + 3\nu + 1.$$

Si l'on effectue les calculs, on trouve finalement

$$\begin{aligned} X_n = & \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\nu}{\sqrt{\nu^2 + 4\nu}} \right) \left(\frac{\nu + 2}{2} + \frac{\sqrt{\nu^2 + 4\nu}}{2} \right)^n \\ & + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\nu}{\sqrt{\nu^2 + 4\nu}} \right) \left(\frac{\nu + 2}{2} - \frac{\sqrt{\nu^2 + 4\nu}}{2} \right)^n. \end{aligned}$$

22. Si, au lieu du procédé de Lagrange, on emploie le premier de ceux que j'ai fait connaître, on trouve

$$X_n = (\nu + 1) \Psi(n, 1) - \Psi(n, 2),$$

$\Psi(n, i)$ étant donné par l'égalité

$$\Psi(n, i) = \sum \frac{(\alpha + \beta)!}{\alpha! \beta!} (\nu + 2)^\alpha (-1)^\beta,$$

dans laquelle le $\sum$ s'étend à tous les systèmes de valeurs possibles des entiers non négatifs α et β qui satisfont à la condition

$$\alpha + 2\beta = n - i.$$

23. On peut remarquer que, si, négligeant absolument les effets d'intonation, on veut ne tenir compte que des effets de mesure, notre problème se réduit à celui-ci :

Parmi les phrases musicales composées de n temps non divisés, combien s'en trouve-t-il qui diffèrent par la mesure?

Ce problème est évidemment un cas particulier du précédent; il suffit, pour en obtenir la solution, de remplacer, dans les résultats qu'on vient d'écrire, la lettre ν par l'unité.

V. — Problème sur le jeu de dames.

24. *Sur un damier présentant une largeur de c cases et une profondeur indéfinie, par combien de chemins un pion qui ne recule jamais et qui part d'une case donnée peut-il arriver à une autre case donnée?*

Pour abrégér les éliminations auxquelles conduit notre méthode, nous supposerons c égal à 6. Cette hypothèse n'aura d'autre effet que d'abrégér les calculs; notre méthode générale n'en sera ni restreinte ni altérée.

25. Nous supposons donc notre damier formé par une suite de rangées de six cases chacune. Nous supposerons de plus que, dans la première rangée, la première case à gauche soit blanche, et que notre pion parte d'une case blanche de cette première rangée.

Nous distinguerons d'ailleurs deux sortes de rangées : celles de rang impair, qui commencent par une case blanche et que nous nommerons *rangées impaires* ; celles de rang pair, qui commencent par une case noire et que nous nommerons *rangées paires*.

La case de départ de notre pion appartenant toujours à la première rangée impaire, la case d'arrivée pourra appartenir soit à la $n^{\text{ième}}$ rangée impaire, soit à la $n^{\text{ième}}$ rangée paire. De là, dans le problème actuel, deux cas différents que nous traiterons l'un après l'autre.

26. Supposons d'abord que notre pion ait sa case d'arrivée sur la $n^{\text{ième}}$ rangée impaire.

Tous les chemins par lesquels ce pion peut arriver sur une case de cette $n^{\text{ième}}$ rangée impaire peuvent se classer en trois espèces : ceux qui se terminent sur la première case blanche de cette rangée, ceux qui se terminent sur la deuxième, ceux qui se terminent sur la troisième, les cases étant comptées à partir de la gauche.

Nous appellerons P_n , Q_n , R_n les nombres respectifs de ces trois sortes de chemins.

27. La $n^{\text{ième}}$ rangée impaire est précédée par la $(n-1)^{\text{ième}}$ rangée paire. Si nous appelons S_{n-1} , T_{n-1} , U_{n-1} les nombres respectifs des chemins qui se terminent, à partir de la gauche, sur la première, la deuxième ou la troisième case blanche de cette rangée paire, nous avons, d'après la marche bien connue du pion du jeu de dames, les six égalités suivantes :

$$\begin{aligned} P_n &= S_{n-1}, & S_{n-1} &= P_{n-1} + Q_{n-1}, \\ Q_n &= S_{n-1} + T_{n-1}, & T_{n-1} &= Q_{n-1} + R_{n-1}, \\ R_n &= T_{n-1} + U_{n-1}, & U_{n-1} &= R_{n-1}, \end{aligned}$$

d'où nous tirons immédiatement

$$\begin{aligned} P_n &= P_{n-1} + Q_{n-1}, \\ Q_n &= P_{n-1} + 2Q_{n-1} + R_{n-1}, \\ R_n &= Q_{n-1} + 2R_{n-1}. \end{aligned}$$

28. Une suite d'éliminations faciles, effectuées sur ces der-

nières égalités, nous donne les relations suivantes :

$$P_n = 5P_{n-1} - 6P_{n-2} + P_{n-3},$$

$$Q_n = 5Q_{n-1} - 6Q_{n-2} + Q_{n-3},$$

$$R_n = 5R_{n-1} - 6R_{n-2} + R_{n-3},$$

lesquelles nous montrent que chacun des nombres P_n , Q_n , R_n est le terme général d'une série récurrente proprement dite, admettant l'équation génératrice du troisième degré

$$x^3 - 5x^2 + 6x - 1 = 0.$$

29. Par suite, si nous posons

$$P_1 = p_1,$$

$$P_2 = p_2 + 5P_1,$$

$$P_3 = p_3 + 5P_2 - 6P_1,$$

la valeur de P_n nous est donnée par la formule

$$P_n = p_1 \Psi(n, 1) + p_2 \Psi(n, 2) + p_3 \Psi(n, 3),$$

l'expression $\Psi(n, i)$ étant définie par l'égalité

$$\Psi(n, i) = \sum \frac{(\alpha + \beta + \gamma)!}{\alpha! \beta! \gamma!} 5^\alpha (-6)^\beta,$$

dans laquelle le $\sum$ s'étend à tous les systèmes possibles de valeurs des entiers non négatifs α , β , γ qui satisfont à la condition

$$\alpha + 2\beta + 3\gamma = n - i.$$

Les expressions de Q_n et R_n sont identiques; il suffirait, pour les obtenir, de remplacer dans tout ce que nous venons d'écrire P et p soit par Q et q , soit par R et r .

30. En raisonnant de même pour le cas où la case d'arrivée appartient à une rangée paire, on trouverait

$$S_n = 5S_{n-1} - 6S_{n-2} + S_{n-3},$$

$$T_n = 5T_{n-1} - 6T_{n-2} + T_{n-3},$$

$$U_n = 5U_{n-1} - 6U_{n-2} + U_{n-3}.$$

Pour obtenir les expressions de S_n , U_n , T_n , il suffirait de prendre

celles de P_n , Q_n , R_n et d'y remplacer les lettres P et p , Q et q , R et r respectivement par les lettres S et s , T et t , U et u .

31. Il est bien clair que, par les résultats qui précèdent, notre problème sur le pion du jeu de dames se trouve complètement résolu. Pour le bien montrer, considérons-en un cas particulier quelconque, celui, par exemple, où, la case de départ étant la seconde case blanche de la première rangée impaire, la case d'arrivée est la troisième de la $n^{\text{ième}}$ rangée paire.

Le nombre cherché est U_n . Nous trouvons, par un calcul direct,

$$U_1 = 0, \quad U_2 = 1, \quad U_3 = 4,$$

et, par suite,

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 1, \quad u_3 = -1.$$

Donc nous avons, pour toutes valeurs de n , et en conservant aux expressions Ψ les significations [29] que nous leur avons assignées,

$$U_n = \Psi(n, 2) - \Psi(n, 3).$$

VI. — Problème sur le jeu d'échecs.

32. *Sur un échiquier présentant une largeur de c cases et une profondeur indéfinie, par combien de chemins différents un cavalier qui ne recule jamais et qui part d'une case donnée peut-il arriver à une autre case donnée ?*

Tel est le problème que nous nous proposons de résoudre. Pour en abrégé les calculs, nous prendrons c égal à 4. Mais nous ferons observer que cette valeur particulière attribuée à c n'enlève rien à la généralité de la méthode que nous allons suivre; elle n'a d'autre effet que de rendre moins longues les éliminations auxquelles se réduit la troisième partie [6] de notre méthode générale.

33. Dans cette hypothèse, notre échiquier aura une largeur de quatre cases et une profondeur indéfinie. Nous pourrions le regarder comme formé par une suite de rangées de quatre cases chacune. Nous supposerons que notre cavalier ait pour point de départ une case de la première rangée et pour point d'arrivée une case de la $n^{\text{ième}}$.

34. Les chemins différents que peut suivre un cavalier partant d'une case de la première rangée et arrivant, sans jamais reculer, à une case de la $n^{\text{ième}}$ peuvent se classer en quatre espèces, suivant qu'ils aboutissent finalement à telle ou telle des quatre cases de cette rangée. Prenons ces cases de gauche à droite, et appelons P_n le nombre des chemins aboutissant à la première case, Q_n celui des chemins aboutissant à la deuxième, R_n et S_n ceux des chemins qui aboutissent respectivement à la troisième et à la quatrième. Si nous donnons un moyen de calculer chacun de ces nombres, notre problème sera résolu.

35. Pour trouver ce moyen, cherchons les relations qui existent entre les nombres P_n, Q_n, R_n, S_n et les nombres analogues d'indices moindres.

La marche connue du cavalier et la figure formée par les trois rangées correspondant sur notre échiquier aux trois indices $n, n-1, n-2$ nous donnent immédiatement les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} P_n &= Q_{n-2} + R_{n-1}, \\ Q_n &= P_{n-2} + R_{n-2} + S_{n-1}, \\ R_n &= P_{n-1} + Q_{n-1} + S_{n-2}, \\ S_n &= Q_{n-1} + R_{n-1}, \end{aligned}$$

et, amenée à ce point, la solution de la question n'est plus qu'un calcul ordinaire.

36. Par une suite d'éliminations, que des remarques assez simples peuvent rendre faciles, nous déduisons des quatre relations qui précèdent les quatre relations suivantes :

$$\begin{aligned} P_n &= 2P_{n-2} + 2P_{n-4} + 4P_{n-6} + 2P_{n-8} - P_{n-10}, \\ Q_n &= 2Q_{n-2} + 2Q_{n-4} + 4Q_{n-6} + 2Q_{n-8} - Q_{n-10}, \\ R_n &= 2R_{n-2} + 2R_{n-4} + 4R_{n-6} + 2R_{n-8} - R_{n-10}, \\ S_n &= 2S_{n-2} + 2S_{n-4} + 4S_{n-6} + 2S_{n-8} - S_{n-10}, \end{aligned}$$

qui nous montrent d'abord que les nombres P_n, Q_n, R_n, S_n constituent chacun le terme général d'une série récurrente proprement dite, ensuite que chacune de ces séries admet l'équation génératrice

$$x^8 - 2x^6 - 2x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 1 = 0,$$

laquelle peut s'écrire aussi

$$(x+1)(x^2-x^2-x-1)(x^4+2x-1)=0.$$

37. Or, les procédés que nous avons fait connaître nous donnent immédiatement l'expression générale de P_n, Q_n, R_n, S_n . Considérons, en effet, P_n ; nous savons que, si l'on pose

$$P_1 = p_1,$$

$$P_2 = p_2,$$

$$P_3 = p_3 + 2P_1,$$

$$P_4 = p_4 + 2P_2,$$

$$P_5 = p_5 + 2P_3 + 2P_1,$$

$$P_6 = p_6 + 2P_4 + 2P_2 + 4P_1,$$

$$P_7 = p_7 + 2P_5 + 2P_3 + 4P_2 + 2P_1,$$

$$P_8 = p_8 + 2P_6 + 2P_4 + 4P_3 + 2P_2,$$

on a identiquement

$$P_n = \sum_{i=1}^8 p_i \Psi(n, i),$$

$\Psi(n, i)$ étant donné par l'égalité

$$\Psi(n, i) = \sum (-1)^0 \frac{(\beta + \delta + \epsilon + \zeta + \theta)!}{\beta! \delta! \epsilon! \zeta! \theta!} 2^{\beta + \delta + \epsilon + \zeta},$$

dans laquelle le signe $\sum$ s'étend à tous les systèmes de valeurs des entiers non négatifs $\beta, \delta, \epsilon, \zeta, \theta$ qui satisfont à la condition

$$2\beta + 4\delta + 5\epsilon + 6\zeta + 8\theta = n - i.$$

Les expressions de Q_n, R_n, S_n se déduiraient d'ailleurs instantanément des relations qui précèdent; il suffirait de remplacer, dans toutes celles-ci, P et p par Q et q , ou R et r , ou S et s .

38. Nous voyons ainsi que P_n, Q_n, R_n, S_n seront connus dès que l'on connaîtra l'indice n , ainsi que les valeurs numériques des nombres p, q, r, s , qui sont, dans chaque espèce, au nombre de huit. Or, ces dernières valeurs pourront se calculer directement

dès que l'on connaît la case de départ; donc notre problème est complètement résolu.

39. Pour en bien faire comprendre la solution, prenons un exemple particulier. Supposons que la case de départ soit la seconde de la première rangée et la case d'arrivée la quatrième de la $n^{\text{ième}}$ rangée. Il s'agira de calculer S_n .

Or, dans ce cas particulier, on voit directement que les huit nombres $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8$ sont respectivement 0, 1, 0, — 1, 1, 1, 0, 0. Donc on a

$$S_n = \Psi(n, 2) - \Psi(n, 4) + \Psi(n, 5) + \Psi(n, 6),$$

les quantités Ψ gardant les significations qu'on leur a données [37] plus haut.

VII. — Sur la méthode en analyse combinatoire.

40. Les problèmes de l'analyse combinatoire sont de telle nature, que la résolution s'en réduit presque toujours à la recherche du nombre $X_{m,n}$ des groupes que l'on peut former, suivant certaines lois données, avec m objets pris n à n . La détermination de ce nombre dépend évidemment des lois données; d'ordinaire, elle présente des difficultés réelles d'autant plus grandes, qu'on ne trouve, dans les Livres et Mémoires, pour ainsi dire aucune indication sur la manière de les surmonter.

Évidemment d'ailleurs, ces difficultés sont de deux sortes, les unes de raisonnement, les autres de calcul; car la détermination du nombre $X_{m,n}$, comme la résolution des problèmes de l'analyse ordinaire, comprend deux parties successives : une partie de raisonnement, analogue à la mise en équations des problèmes d'Algèbre; une partie de calcul, analogue à la résolution de ces équations.

41. C'est dans la première partie que se présentent les difficultés les plus sérieuses. On s'y propose, non pas, certes, de trouver l'expression même de $X_{m,n}$ en fonction de m , de n et des paramètres introduits par les lois dont nous avons parlé : une détermination aussi immédiate ne pourrait convenir qu'à des cas tellement simples,

que leur extrême simplicité leur enlèverait toute espèce d'intérêt ; on s'y propose, disons-nous, de découvrir des relations où entre l'inconnue $X_{m,n}$; la grande difficulté, c'est d'arriver à de pareilles relations.

Si l'on étudie les procédés, si nombreux et en apparence si divers, employés jusqu'à présent dans cette recherche, on voit qu'ils consistent tous à comparer les groupes dont on cherche le nombre $X_{m,n}$ soit à des groupes dont les nombres sont connus, soit à des groupes dont les nombres sont inconnus.

Avec quels groupes doit-on comparer les groupes étudiés ? De quelle manière doit s'effectuer cette comparaison ? La réponse à cette double question ne peut être donnée pour tous les cas possibles. La formuler pour une série de cas déterminés, c'est-à-dire pour un ensemble déterminé de problèmes, ce serait donner la méthode générale permettant de résoudre tous ces problèmes, ce serait faire pour eux ce que nous venons de faire pour ceux qui rentrent dans l'énoncé général [1] donné au commencement du présent Mémoire.

Nous pouvons dire seulement, d'une façon assez vague, et en nous fondant bien moins sur le raisonnement que sur notre expérience, que le plus difficile n'est pas d'effectuer la comparaison des groupes étudiés avec d'autres groupes, mais de choisir ces autres groupes. Nous serions même tenté d'énoncer cette règle empirique : toutes les fois que la comparaison des groupes étudiés avec les autres groupes ne s'effectue pas très-facilement, toutes les fois, en d'autres termes, qu'elle ne conduit pas, d'une façon presque immédiate, à une ou plusieurs équations, c'est que les autres groupes sont mal choisis ; il faut procéder à un choix nouveau.

42. Quoi qu'il en soit, les groupes étudiés, comme ceux avec lesquels on les compare, n'entrent que par leurs nombres dans les relations auxquelles on parvient. Les groupes dont les nombres sont connus n'apportent, dans ces relations, que des quantités connues, dont il est pour ainsi dire inutile de s'occuper. Les groupes dont les nombres sont inconnus y apportent des quantités inconnues, et ces quantités inconnues, qu'il est indispensable de considérer, se partagent en trois classes parfaitement distinctes :

D'abord, le nombre $X_{m,n}$ des groupes étudiés ;

Ensuite, les nombres $X_{m',n'}$, $X_{m'',n''}$, ..., qui correspondent à des groupes formés suivant les mêmes lois que les groupes étudiés, mais différant de ceux-ci par les valeurs numériques des indices m et n , ou de l'un seulement de ces indices;

Enfin, les nombres $Y_{p,q}$, $Y_{p',q'}$, ..., $Z_{r,s}$, $Z_{r',s'}$, ..., etc., qui correspondent à des groupes différant de ceux qu'on étudie, non point par des valeurs numériques d'indices, mais par les lois mêmes qui président à leur formation.

L'inconnue $X_{m,n}$ entre forcément dans une ou plusieurs des relations qu'on obtient; les inconnues $X_{m',n'}$, $X_{m'',n''}$, ..., jointes à $X_{m,n}$, donnent lieu à des lois de récurrence simples ou doubles, suivant qu'elles présentent des variations d'un seul ou des deux indices; les inconnues $Y_{p,q}$, $Y_{p',q'}$, ..., $Z_{r,s}$, $Z_{r',s'}$, ..., etc., peuvent presque toujours être regardées comme des inconnues auxiliaires qu'il faut éliminer.

43. Supposons maintenant qu'on ait achevé la partie de raisonnement, c'est-à-dire qu'on ait réussi à former une ou plusieurs équations entre les inconnues. Il faut passer à la partie de calcul, qui, comme nous l'avons dit, est de beaucoup la moins difficile des deux.

Les difficultés qu'elle présente ne consistent, en effet, que dans des calculs à effectuer, et ceux-ci s'effectuent par les seuls procédés de l'Analyse ordinaire, non pas prise dans toute sa généralité, mais réduite aux trois théories de la résolution des équations, des séries récurrentes et de l'élimination.

Si l'on n'a introduit dans les calculs que la seule inconnue $X_{m,n}$, auquel cas il a suffi de former une seule équation, on n'a qu'à résoudre cette équation.

Si, outre $X_{m,n}$, on a considéré encore les inconnues analogues $X_{m',n'}$, $X_{m'',n''}$, ..., correspondant à des groupes de même nature que les groupes étudiés, l'équation ou les équations reliant ces inconnues expriment des lois récurrentes d'où l'on pourra, dans la plupart des cas, déduire l'expression de $X_{m,n}$.

Si enfin l'on considère à la fois l'inconnue $X_{m,n}$, les inconnues analogues $X_{m',n'}$, $X_{m'',n''}$, ... et les inconnues non analogues $Y_{p,q}$, $Y_{p',q'}$, ..., $Z_{r,s}$, $Z_{r',s'}$, ..., etc., il faudra d'abord, par des éliminations convenables, séparer les inconnues, c'est-à-dire obtenir des équations

tions ne contenant plus que des quantités X , ou des quantités Y , ou des quantités Z , etc.; il faudra ensuite, cette séparation une fois effectuée, étudier les lois récurrentes données par les équations obtenues. Comme dans le cas précédent, on en pourra généralement conclure l'expression même de $X_{m,n}$.

44. A cet avantage de se traiter par les procédés de l'Analyse ordinaire, la partie de calcul joint celui, non moins appréciable, de se traiter dans tous les cas possibles d'une manière uniforme. La partie de raisonnement ne participe point à cette uniformité : elle varie toutes les fois que l'on passe d'un genre de problèmes à un autre.

45. En résumé, pour calculer $X_{m,n}$, la marche à suivre, tant dans le raisonnement que dans le calcul, dépend surtout de ce que la comparaison des groupes donnés avec d'autres groupes porte sur des groupes dont le nombre est connu, ou sur des groupes dont le nombre est inconnu et qui sont de même nature que les groupes étudiés, ou enfin sur des groupes dont le nombre est encore inconnu, mais qui diffèrent des groupes étudiés par la loi même de formation.

Le cas où la comparaison embrasse à la fois ces trois sortes de groupes comprend évidemment tous les autres. Nous plaçant dans cette hypothèse, nous pouvons esquisser de la manière suivante la marche à suivre pour arriver à $X_{m,n}$:

1° *Choisir les groupes auxquels on comparera les groupes à étudier;*

2° *Comparer les groupes étudiés aux groupes qu'on vient de choisir, pour relier par des équations les nombres qui leur correspondent;*

3° *Séparer les inconnues, de façon à n'avoir plus que des équations dans chacune desquelles les inconnues correspondent toutes à des groupes d'une même nature;*

4° *Résoudre, par la méthode des séries récurrentes, celle de ces nouvelles équations qui répond aux groupes étudiés.*

46. Si en regard de cette esquisse un peu vague, dans ses deux premières parties surtout, on place la méthode [8] qui fait l'objet

du présent Mémoire, on voit que cette dernière comprend aussi quatre opérations successives, rentrant tout à fait dans celles que nous venons d'indiquer, et il s'ensuit immédiatement que cette dernière méthode [8], qui nous permet de résoudre toute une série de problèmes, peut être regardée comme un type pour les méthodes qui permettraient d'en résoudre d'autres séries.

On voit par là l'importance extrême de cette méthode [8]; mais, n'ait-on ce rôle de type qu'elle peut, selon nous, remplir, elle n'en serait pas moins très-importante, puisqu'elle permet de résoudre une infinité de problèmes, et que ces problèmes appartiennent à l'Analyse combinatoire, c'est-à-dire à une partie des Mathématiques où les méthodes générales étaient jusqu'à présent fort rares, pour ne pas dire inconnues.

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX.

SÉANCE DU 8 NOVEMBRE 1878.

PRÉSIDENTE DE M. DARBOUX.

M. le Président rappelle la perte que la Société a faite dans la personne de M. Bienaymé; la Société s'associe aux regrets exprimés par son Président.

Communications :

M. Darboux : *Sur la description mécanique de la courbe générale d'un degré quelconque.*

M. Halphen : *Sur la réduction de certaines équations différentielles.*

SÉANCE DU 22 NOVEMBRE 1878.

PRÉSIDENTE DE M. DARBOUX.

Communications :

M. Lemonnier : *Sur la résolution d'un système de trois équations du second degré à trois inconnues.*

M. Laguerre : *Sur l'intégrale* $\int_0^z z^n e^{-\frac{z^2}{2} + sz} dz$.

M. Jordan : *Sur la série de Fourier*.

M. Darboux : *Sur l'extension de la théorie des mouvements plans aux transformations les plus générales, en particulier sur la déformation d'une figure qui demeure semblable à elle-même*.

M. Darboux : *Sur le quadrilatère circonscrit à un cercle*.

M. Halphen : *Sur les polygones de Poncelet*.

SÉANCE DU 13 DÉCEMBRE 1878.

PRÉSIDENCE DE M. LEMONNIER.

Communications :

M. Laguerre : *Sur les normales aux coniques*.

M. Halphen présente, de la part de M. D. André, un Mémoire intitulé *Détermination du nombre des arrangements complets où les éléments consécutifs satisfont à des conditions données*.

M. Halphen : *Sur l'absence de points isolés dans les courbes unicursales*.

SÉANCE DU 27 DÉCEMBRE 1878.

PRÉSIDENCE DE M. DARBOUX.

Communication :

M. Darboux : *Sur les systèmes articulés*.

SÉANCE DU 10 JANVIER 1879.

PRÉSIDENCE DE M. DARBOUX.

Élections : Le Bureau et le Conseil sont renouvelés, comme l'indique l'état qui est au commencement du Volume.

Communication :

M. Laguerre : *Sur les coniques homofocales*

SÉANCE DU 24 JANVIER 1879.

PRÉSIDENCE DE M. O. BONNET.

Communication :

M. Laguerre : *Sur les coniques homofocales.*

SÉANCE DU 14 FÉVRIER 1879.

PRÉSIDENCE DE M. O. BONNET.

Communications :

M. Laguerre : *Sur l'intégrale* $\int_x^\infty \frac{e^{-x} dx}{x}$.

M. Halphen : *Sur la formation de l'équation différentielle des coniques.*

M. Stephanos : *Sur une propriété remarquable des nombres incommensurables.*

M. Fouret : *Sur le mouvement d'un corps qui reste homothétique à lui-même.*

Présentation d'un nouveau Membre : M. E. Picard est présenté par MM. Lemonnier et Picquet.

Supplément à l'état de la Société mathématique de France,
pour l'année 1879.

Membres du Conseil non résidents..... $\left\{ \begin{array}{l} \text{M. ANDRÉ (Désiré).} \\ \text{M. Aoust (l'abbé).} \\ \text{M. CLAYEUX.} \\ \text{M. WEYR (Émile).} \end{array} \right.$

Sur quelques propriétés des coniques homofocales ;

par M. LAGUERRE.

(Séances des 10 et 24 janvier 1879.)

I.

1. Je considère, dans un plan, un système de coniques homofocales; soient Ox et Oy les axes de ces coniques, F et F' leurs foyers réels communs, que je supposerai situés sur l'axe Ox ; les deux foyers imaginaires communs Φ et Φ' seront, par suite, situés sur l'axe Oy . Pour abréger, j'appellerai simplement *conique du système* une conique ayant pour foyers les points F , F' , Φ et Φ' .

Étant donné un point quelconque M du plan, deux coniques du système se croisent en ce point; désignons par N et N' les centres des deux cercles qui osculent respectivement ces deux coniques au point M , et par μ la droite qui joint ces deux points. Cette droite est parfaitement déterminée quand on se donne le point M et les deux foyers F et F' ; je dirai que c'est l'axe du point M .

2. Réciproquement, étant donnée une droite μ du plan, il existe trois points M , M' et M'' pour lesquels cette droite est un axe.

Si l'on considère la conique du système qui touche la droite μ , et que l'on désigne respectivement par α et β les points où la normale menée au point de contact rencontre les axes Ox et Oy , les trois points M , M' et M'' , qui ont pour axe la droite μ , sont situés sur le cercle A passant par les points α , β et le centre O commun aux coniques du système.

3. On sait que toutes les propriétés des normales et des centres de courbure d'une conique sont triples; les normales à une conique demeurent, en effet, normales à la transformée de cette conique quand on effectue une transformation homographique qui, aux deux ombilics du plan ⁽¹⁾, fait correspondre deux des foyers indépendants de cette conique.

(¹) Je désigne ainsi les points imaginaires situés à l'infini et communs à tous les cercles tracés dans le plan.

De la proposition précédente, on déduit donc immédiatement les théorèmes qui suivent :

La conique qui, passant par le point β et les deux foyers F et F' , a pour asymptotes l'axe Oy et la droite $\alpha\beta$ contient les trois points M , M' et M'' .

La conique qui, passant par le point α et les deux foyers Φ et Φ' , a pour asymptotes l'axe Ox et la droite $\alpha\beta$ contient également les trois points M , M' et M'' .

4. Les trois points qui ont pour axe la droite μ sont, comme on le voit, les trois points communs aux deux coniques dont je viens de parler et au cercle A défini précédemment [2].

Mais on peut aussi les déterminer par l'intersection de ce cercle et d'une conique avec une conique ayant pour axes les droites Ox et Oy .

Désignons, en effet, par C la conique du système qui touche la droite μ et par K la conique dont les sommets coïncident avec les points de rebroussement de la développée de C ; nous pourrons énoncer la propriété suivante :

Les points M , M' et M'' , qui ont pour axe la droite μ , sont situés sur la conique K ; le quatrième point de rencontre de cette conique et du cercle A est le point O' qui, sur le cercle, est diamétralement opposé au centre O commun aux coniques du système.

5. *Le point O' , diamétralement opposé au point O sur le cercle A , est le conjugué harmonique du point O relativement aux points M , M' et M'' .*

6. *Le triangle $MM'M''$ est circonscrit à la conique C du système qui touche la droite μ .*

7. Considérons l'hyperbole équilatère H , qui a pour centre le point O et dont l'axe transverse, dirigé suivant Oy , a pour longueur FF' ; nous pourrons énoncer la proposition suivante :

Le triangle $MM'M''$ est autopolaire relativement à l'hyperbole H .

8. Soit $M'M''$ un côté quelconque du triangle $MM'M''$; du point O abaissons une perpendiculaire sur ce côté, et désignons par M_0 le point symétrique, par rapport au point O , du pied de cette perpendiculaire.

Le point M_0 est situé sur l'axe μ du point M , et la droite MM_0 est perpendiculaire à cet axe.

9. Étant donnée une conique C du système, on voit que, si la droite μ roule sur cette conique, les points correspondants M , M' et M'' décrivent la conique K , tandis que les côtés du triangle $MM'M''$ roulent tangentiellement à C elle-même.

D'où les propositions suivantes :

Étant donnée une conique quelconque C du système, désignons par K la conique dont les sommets coïncident avec les points de rebroussement de la développée de C .

Cela posé, en appelant O' un point quelconque de K et O le centre commun aux courbes du système, si, sur OO' comme diamètre, on décrit un cercle, ce cercle rencontre les axes en deux points; la droite qui joint ces deux points est normale à la conique C .

Ce cercle rencontre de nouveau K en trois autres points; chacun de ces points a pour axe une même droite tangente à C .

Les côtés du triangle formé par ces points sont circonscrits à C .

Ce triangle est autopolaire relativement à l'hyperbole équilatère H .

10. Les coniques C et K , qui figurent dans l'énoncé des propositions qui précèdent, ont entre elles des relations qui méritent d'être étudiées.

Entre autres propositions, je rappellerai la suivante, que j'ai déjà fait connaître, il y a quelques années, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* ⁽¹⁾ :

Si d'un point de la conique K on mène des tangentes à la développée de la conique C , les quatre points de contact sont

⁽¹⁾ Sur la développée de l'ellipse (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, janvier 1875).

en ligne droite, et la droite qui joint ces points de contact est normale à la courbe C.

II.

11. Soit M un point quelconque du plan; par ce point passent deux coniques du système. En désignant par N et N' les centres des cercles qui osculent ces coniques au point donné, je dirai que N et N' correspondent au point M .

Réciproquement, étant donné un point N du plan, on peut chercher combien de points M lui correspondent, c'est-à-dire combien existent de cercles ayant le point M pour centre et osculateurs d'une conique du système.

12. Pour résoudre cette question, je m'appuierai sur les considérations suivantes.

Étant donné un point N du plan, si de ce point on mène les normales à une conique du système, les tangentes aux points de contact touchent une parabole P tangente aux axes de la conique. Cette parabole est la même quelle que soit la conique du système que l'on considère; elle est l'enveloppe des polaires du point N relativement aux diverses coniques qui ont pour foyers les points F et F' .

13. Pour le démontrer, je m'appuierai sur cette importante proposition, due à M. Chasles :

Le lieu des pôles d'une droite relativement aux coniques qui forment un système homofocal est une droite qui rencontre la droite donnée au point où elle touche la conique du système qui lui est tangente.

Soient P l'enveloppe des polaires dont je viens de parler (on voit immédiatement que c'est une parabole tangente aux axes), C une conique du système, et T une tangente commune à C et à P . En désignant par M le point où elle touche C , on voit que le lieu des pôles de T relativement aux coniques du système est la droite menée par M normalement à C ; en vertu du théorème de M. Chasles

que je viens de rappeler, cette droite passe par le point N; donc NM est normale à la conique C.

Réciproquement, abaissons du point N une normale à la conique C, et soit M le pied de cette normale. En désignant par T la tangente menée en ce point, on voit que le lieu des pôles de T relativement aux coniques du système est la droite MN. Il y existe donc une conique du système pour laquelle le pôle de T se confond avec le point N; par suite, la droite T est tangente à la parabole P.

La proposition que j'ai énoncée est donc entièrement établie ⁽¹⁾.

14. Le foyer de la parabole P peut se déterminer aisément. On peut, en effet, la définir de la façon suivante :

Si autour du point N on fait tourner une transversale, et que par son pôle on mène une perpendiculaire à cette droite, l'enveloppe de ces perpendiculaires est la parabole P ⁽²⁾.

Pour avoir le foyer de la parabole, il faut chercher les droites isotropes tangentes à cette courbe. On les obtiendra si l'on considère les transversales isotropes passant par le point N. En désignant par I l'un des ombilics du plan, soit NI l'une de ces transversales; menons par les foyers F et F' des parallèles à cette droite. Le foyer ϕ de la parabole se trouve sur la droite isotrope conjuguée harmonique de NI relativement aux deux droites dont je viens de parler; des conséquences analogues se déduiraient de la considération de la transversale isotrope passant par le second ombilic J.

On peut donc énoncer la propriété suivante :

Le foyer de la parabole P est le conjugué harmonique du point N relativement aux deux foyers F et F' communs à toutes les courbes du système.

⁽¹⁾ On démontrerait de même que :

Si d'un point N de l'espace on mène les normales à une surface du second ordre, les pieds des normales sont les points de contact des plans qui touchent la surface et sont osculateurs de la cubique gauche enveloppée par les plans polaires de N, relativement aux diverses surfaces du second ordre qui ont les mêmes focales que la surface donnée.

⁽²⁾ CHASLES, *Traité des sections coniques*, p. 145.

J'ajouterai que :

La directrice de cette parabole est la droite ON qui joint le point N au centre commun des coniques du système.

15. Du théorème précédent résultent immédiatement les conséquences suivantes :

Si l'on imagine, dans le plan des deux axes Ox et Oy , deux droites quelconques D et D' , le foyer de la parabole qui touche ces quatre droites a pour conjugué harmonique, relativement aux foyers F et F' , le point de rencontre des normales menées aux deux courbes du système qui touchent D et D' .

Et, si l'on suppose que les droites D et D' viennent se confondre :

Si en un point M d'une conique on mène la tangente, et si l'on imagine la parabole qui touche cette tangente au point M et en outre est tangente aux axes de la conique, le conjugué harmonique du foyer de cette parabole, relativement aux deux foyers de la courbe, est le centre du cercle qui oscule cette courbe au point M .

16. Cela posé, pour trouver les points M correspondant à un point donné M , construisons le point M_0 , conjugué harmonique de M relativement aux deux foyers F et F' , et imaginons la parabole P , qui a pour foyer le point M_0 et pour directrice la droite OM .

Il est clair, par ce qui précède, que :

Les points N correspondant au point M sont les pieds des normales abaissées de ce dernier point sur la parabole P .

Ces points sont donc au nombre de trois, et, si l'on désigne par I le milieu du segment $M_0 M$, ils s'obtiendront en cherchant l'intersection de P avec le cercle décrit sur $M_0 I$ comme diamètre.

17. Le triangle formé par ces trois points jouit de diverses propriétés intéressantes, parmi lesquelles je me bornerai à mentionner la suivante :

Le triangle formé par les trois points correspondant à un point donné du plan est circonscrit à une conique du système.

Je me réserve de revenir sur ce sujet et d'étendre aux surfaces homofocales du second ordre les résultats contenus dans cette Note.

Sur l'intégrale $\int_x^\infty \frac{e^{-x} dx}{x}$; par M. LAGUERRE.

(Séances des 14 et 28 février 1879.)

I.

1. L'intégration par parties donne, en posant

$$F(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1 \cdot 2}{x^3} - \dots \pm \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}{x^n},$$

la relation suivante :

$$(1) \quad \int_x^\infty \frac{e^{-x} dx}{x} = e^{-x} F(x) \mp 1 \cdot 2 \dots n \int_x^\infty \frac{e^{-x} dx}{x^{n+1}}.$$

La série que l'on obtient en faisant croître indéfiniment n dans le polynôme $F(x)$ est nécessairement divergente pour toute valeur de x , quelque grande qu'on la suppose. Néanmoins, pour de grandes valeurs de la variable, elle peut, en ne tenant compte que des premiers termes, fournir une valeur très-approchée de l'intégrale considérée (1).

Je me propose, dans la Note qui suit, d'obtenir le développement en fractions continues du polynôme $F(x)$.

2. En posant, pour abréger, $N = \pm 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$, on a

$$F(x) = e^x \left(\int_x^\infty \frac{e^{-x} dx}{x} + N \int_x^\infty \frac{e^{-x} dx}{x^{n+1}} \right),$$

(1) Relativement à ces séries demi-convergentes, voir la Note de M. Hermite *Sur l'intégrale* $\int_0^1 \frac{z^{a-1} - z^a}{1-z} dz$, insérée dans les *Actes de l'Académie royale de Turin* (17 novembre 1878).

d'où

$$(2) \quad F'(x) = F(x) - \frac{1}{x} - \frac{N}{x^{n+1}}.$$

Soit $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ une réduite du polynôme $F(x)$ dont le dénominateur soit d'un degré $m \leq \frac{n}{2}$. On a

$$F(x) = \frac{\varphi(x)}{f(x)} + \left(\frac{1}{x^{2m+1}} \right) \quad (1),$$

d'où

$$F'(x) = \frac{\varphi'(x)f(x) - f'(x)\varphi(x)}{f^2(x)} + \left(\frac{1}{x^{2m+1}} \right),$$

ou encore, en vertu de la relation (2), et en remarquant que $2m$ est au plus égal à n ,

$$\frac{\varphi'(x)f(x) - f'(x)\varphi(x)}{f^2(x)} = \frac{\varphi(x)}{f(x)} - \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x^{2m+1}} \right),$$

ou encore

$$(3) \quad x[\varphi'(x)f(x) - f'(x)\varphi(x) - \varphi(x)f'(x)] + f^2(x) = A,$$

A désignant une quantité constante.

3. Formons maintenant l'équation linéaire du second ordre $My'' - Ny' + Py = 0$, qui a pour solutions

$$y_1 = f(x) \quad \text{et} \quad y_2 = \varphi(x)e^{-x} - f(x) \int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx;$$

on a, en vertu d'une formule bien connue,

$$\frac{N}{M} = \frac{d}{dx} \log \Omega, \quad \text{où} \quad \Omega = y_1' y_2 - y_2' y_1.$$

Or un calcul facile donne, en tenant compte de la relation (3),

$$\Omega = \frac{A e^{-x}}{x};$$

(¹) Je désigne généralement, et en faisant abstraction des valeurs des coefficients, par $\left(\frac{1}{x^p} \right)$ une série ordonnée suivant les puissances décroissantes de x commençant par un terme en $\frac{1}{x^p}$.

on a donc

$$\frac{N}{M} = - \left(1 + \frac{1}{x} \right),$$

d'où il suit que le polynôme $f(x)$ satisfait à l'équation différentielle du second ordre

$$(4) \quad xy'' + (x+1)y' - my = 0,$$

dont une seconde solution est

$$u = \varphi(x)e^{-x} - f(x) \int_x^\infty \frac{e^{-x} dx}{x}.$$

Le développement en série donne aisément

$$\begin{aligned} f(x) = & x^m + m^2 x^{m-1} + \frac{m^2(m-1)^2}{1 \cdot 2} x^{m-2} \\ & + \frac{m^2(m-1)^2(m-2)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{m-3} + \dots + 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m. \end{aligned}$$

4. En dérivant m fois de suite l'équation (4), il vient

$$xy^{(m+2)} + (x+m+1)y^{(m+1)} = 0,$$

d'où, en désignant par B une quantité constante,

$$y^{(m+1)} = B \frac{e^{-x}}{x^{m+1}},$$

et, par suite,

$$y = \frac{B}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m} \int_x^\infty \frac{e^{-z}(z-x)^m}{z^{m+1}} dz;$$

c'est une solution particulière de l'équation (4), et, comme elle ne renferme pas de termes entiers en x , sa valeur est précisément la fonction que j'ai désignée précédemment par u .

On a donc, en modifiant un peu les notations déjà employées et en mettant en évidence le degré du polynôme $f(x)$,

$$u_m = \varphi_m(x)e^{-x} - f_m(x) \int_x^\infty \frac{e^{-x} dx}{x} = \frac{B}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m} \int_x^\infty \frac{e^{-z}(z-x)^m}{z^{m+1}} dz;$$

en y faisant $x = 0$, on en déduit

$$\frac{B}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m} = -f_m(0) = -1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m = -m!,$$

et la formule précédente devient

$$(5) \quad u_m = \varphi_m(x) e^{-x} - f_m(x) \int_x^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{x} = -m! \int_x^{\infty} \frac{e^{-z} (z-x)^m}{z^{m+1}} dz.$$

5. En dérivant l'équation précédente, on a

$$\begin{aligned} u'_m &= m!m \int_x^{\infty} \frac{e^{-z} (z-x)^{m-1}}{z^{m+1}} dz = -\frac{m!m}{x} \int_x^{\infty} \frac{e^{-z} (z-x)^{m-1} [(z-x) - z]}{z^{m+1}} dz \\ &= -\frac{m!m}{x} \int_x^{\infty} \frac{e^{-z} (z-x)^m}{z^{m+1}} dz \\ &\quad + \frac{m!m}{x} \int_x^{\infty} \frac{e^{-z} (z-x)^{m-1}}{z^m} dz = \frac{mu_m - m^2 u_{m-1}}{x}; \end{aligned}$$

en combinant cette valeur de u'_m avec l'équation (4) à laquelle satisfait u_m , on obtient la relation

$$(6) \quad u_{m+1} = (x + 2m + 1) u_m - m^2 u_{m-1},$$

d'où l'on déduit les deux suivantes :

$$(7) \quad f_{m+1}(x) = (x + 2m + 1) f_m(x) - m^2 f_{m-1}(x)$$

et

$$(8) \quad \varphi_{m+1}(x) = (x + 2m + 1) \varphi_m(x) - m^2 \varphi_{m-1}(x).$$

6. Ayant, comme il est facile de le voir,

$$u_0 = -\int_x^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{x} \quad \text{et} \quad u_1 = e^{-x} - (x+1) \int_x^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{x},$$

on déduit de la formule (6) le développement suivant :

$$\begin{aligned} \int_x^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{x} &= e^{-x} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+7} + \frac{1}{x+9} - \frac{1}{x+11} + \dots \\ &\quad - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots \end{aligned}$$

dont la loi est évidente.

Les diverses réduites de cette expression sont

$$e^{-x} \frac{1}{x+1}, \quad e^{-x} \frac{x+3}{x^2+4x+2}, \quad e^{-x} \frac{x^2+8x+11}{x^3+9x^2+18x+6}, \quad \dots,$$

l'expression générale de la $m^{\text{ième}}$ réduite étant $e^{-x} \frac{\varphi_m(x)}{f_m(x)}$; les formules (7) et (8) permettent d'ailleurs de calculer successivement les valeurs des polynômes $\varphi_m(x)$ et $f_m(x)$.

7. Comme la fraction continue précédente provient d'une série divergente, il est nécessaire de prouver qu'elle est convergente et a pour limite $\int_x^\infty \frac{e^{-x} dx}{x}$. A cet effet, je remarque que de l'équation (5) on déduit

$$\int_x^\infty \frac{e^{-x} dx}{x} = e^{-x} \frac{\varphi_m(x)}{f_m(x)} + \frac{m!}{f_m(x)} \int_x^\infty \frac{e^{-z} (z-x)^m dz}{z^{m+1}} dx.$$

De là résulte immédiatement que les diverses réduites dont l'expression générale est $e^{-x} \frac{\varphi_m(x)}{f_m(x)}$ vont toujours en croissant en restant inférieures à la valeur de l'intégrale cherchée. Pour démontrer qu'elles ont cette intégrale pour limite, il suffit de faire voir que la limite de $\frac{m!}{f_m(x)} \int_x^\infty \frac{e^{-z} (z-x)^m dz}{z^{m+1}}$ est nulle quand m croît indéfiniment.

Je ferai observer d'abord que le facteur $\frac{m!}{f_m(x)}$ tend vers zéro; puis, en désignant par A une quantité très-grande et arbitrairement choisie, je mettrai l'intégrale $\int_x^\infty \frac{e^{-z} (z-x)^m dz}{z^{m+1}}$ sous la forme suivante :

$$\int_x^A \frac{e^{-z} (z-x)^m dz}{z^{m+1}} + \int_A^\infty \frac{e^{-z} (z-x)^m dz}{z^{m+1}}.$$

Relativement à la première intégrale, comme dans l'intervalle considéré $\frac{z-x}{z}$ est toujours plus petit que $1 - \frac{x}{A}$, cette intégrale est plus petite que $\left(1 - \frac{x}{A}\right)^m \int_x^\infty \frac{e^{-x} dx}{x}$; donc, quelque grand que

soit A , elle tend vers zéro quand m augmente indéfiniment. La seconde intégrale est évidemment plus petite que $\int_A^\infty e^{-x} dx$, c'est-à-dire que e^{-A} ; donc, pour une valeur suffisamment grande de A , elle est aussi petite que l'on veut. Ainsi, la fraction continue, quoique provenant d'une série essentiellement divergente, est elle-même convergente et a pour limite $\int_x^\infty \frac{e^{-x} dx}{x}$.

8. Comme application, faisons $x = 1$; les réduites suivantes :

$$\frac{4}{7e}, \quad \frac{20}{34e}, \quad \frac{124}{209e}, \quad \frac{920}{1546e}, \quad \frac{7940}{13327e}$$

seront des valeurs approchées de l'intégrale $\int_1^\infty \frac{e^{-x} dx}{x}$; en les réduisant en décimales, on obtient les expressions suivantes :

$$0,21; \quad 0,216; \quad 0,218; \quad 0,2189; \quad 0,2192.$$

La véritable valeur est 0,2193839.

En faisant $x = 4$, la deuxième réduite donne pour valeur approchée de l'intégrale $\int_4^\infty \frac{e^{-x} dx}{x}$ la valeur $\frac{7}{34e}$, ou, en décimales, 0,00377, dont les trois premiers chiffres significatifs sont exacts.

9. Dans sa *Mécanique céleste* (t. IV, Livre X), Laplace a donné le développement en fraction continue de l'intégrale $\int_x^\infty e^{-x^2} dx$.

Sa démonstration, reposant sur l'emploi d'une série divergente, est, comme l'a fait remarquer Jacobi, entièrement inadmissible; ses résultats sont néanmoins exacts et ont été démontrés directement par l'illustre géomètre (1) allemand.

La méthode que j'ai développée ci-dessus, relativement à l'intégrale $\int_x^\infty \frac{e^{-x} dx}{x}$, s'applique entièrement à l'intégrale considérée

(1) *De fractione continua, in quam integrale $\int_x^\infty e^{-x^2} dx$ evolvere licet* (*Journal de Crelle*, t. 12, p. 346).

par Laplace, et elle montre d'une façon très-nette comment, tout en partant d'une série divergente, on peut néanmoins arriver à une fraction continue donnant la valeur de la fonction qu'il s'agissait de développer.

II.

1. J'ai montré que les diverses réduites $\frac{p_n(x)}{f_n(x)}$ de la série semi-convergente

$$F(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1.2}{x^3} - \frac{1.2.3}{x^4} + \frac{1.2.3.4}{x^5} + \dots$$

avaient pour limite la transcendante $e^x \int_x^\infty \frac{e^{-x_1} dx_1}{x}$.

On a d'ailleurs, en représentant par $\Pi(n)$ le produit $1.2\dots(n-1)n$,

$$(1) \quad f_n(x) = \Pi(n) \left[1 + nx + \frac{n(n-1)}{1^2.2^2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-3)}{1^2.2^2.3^2} x^3 + \dots \right],$$

$$(2) \quad x f'_n(x) = n f_n(x) - n^2 f_{n-1}(x)$$

et

$$(3) \quad f_{n+1}(x) = (x + 2n + 1) f_n(x) - n^2 f_{n-1}(x).$$

La série $F(x)$ peut se mettre sous la forme suivante :

$$\int_{-\infty}^0 e^z dz \frac{1}{x} + \int_{-\infty}^0 e^z z dz + \frac{1}{x^3} \int_{-\infty}^0 e^z z^2 dz + \dots + \frac{1}{x^{m+1}} \int_{-\infty}^0 e^z z^m dz + \dots$$

Des principes posés par M. Heine, il résulte immédiatement que, $\psi(x)$ désignant un polynôme quelconque d'un degré inférieur à n , on a

$$(4) \quad \int_{-\infty}^0 e^x f_n(x) \psi(x) dx = 0,$$

d'où l'on conclut, puisque e^x est toujours positif, que l'équation

$$f_n(x) = 0$$

a toutes ses racines réelles et inégales; elles sont d'ailleurs évidemment négatives.

2. En particulier, on déduit de l'équation (4) la relation sui-

vante, où n et n' désignent deux nombres entiers différents :

$$(5) \quad \int_{-\infty}^0 e^x f_n(x) f_{n'}(x) dx = 0.$$

Pour évaluer $\int_{-\infty}^0 e^x f_n^2(x) dx$, je remarque que, en intégrant par parties, on a

$$\int_{-\infty}^0 e^x f_n^2(x) dx = [e^x f_n^2(x)]_{-\infty}^0 - 2 \int_{-\infty}^0 e^x f_n(x) f_n'(x) dx;$$

l'intégrale qui figure dans le second membre de cette identité est nulle, en vertu de la relation (4); on déduit donc de la relation (1)

$$(6) \quad \int_{-\infty}^0 e^x f_n^2(x) dx = \Pi^2(n).$$

Des formules précédentes résulte, comme on sait, le développement d'une fonction quelconque $\Phi(x)$ au moyen des polynômes $f_n(x)$.

Si l'on pose, en effet,

$$\Phi(x) = A_0 + A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x) + \dots + A_n f_n(x) + \dots,$$

on a

$$A_n = \frac{\int_{-\infty}^0 e^x \Phi(x) f_n(x) dx}{\Pi^2(n)}.$$

3. Soit, comme application,

$$\Phi(x) = e^{tx}.$$

On aura

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^0 e^{x(1+t)} f_n(x) dx \\ &= \Pi(n) \int_{-\infty}^0 e^{x(1+t)} \left[1 + nx + \frac{n(n-1)}{1^2 \cdot 2^2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} x^3 + \dots \right] \\ &= \Pi(n) \left[\frac{1}{1+t} - \frac{n}{(1+t)^2} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{1}{(1+t)^3} + \dots \right] = \Pi(n) \frac{t^n}{(1+t)^{n+1}}, \end{aligned}$$

d'où le développement suivant :

$$e^{tx} = \frac{1}{1+t} + \frac{t}{(1+t)^2} f_1(x) + \frac{t^2}{(1+t)^3} \frac{f_2(x)}{1.2} + \dots$$

$$+ \frac{t^n}{(1+t)^{n+1}} \frac{f_n(x)}{\Pi(n)} + \dots$$

ou encore, en posant $t = \frac{z}{1-z}$,

$$(7) \quad \frac{e^{\frac{zx}{1-z}}}{1-z} = 1 + z f_1(x) + \frac{z^2}{1.2} f_2(x) + \dots + \frac{z^n}{\Pi(n)} f_n(x) + \dots,$$

développement qui subsiste évidemment pour toute valeur de z dont le module est plus petit que l'unité.

Les diverses propriétés des polynômes $f_n(x)$ se déduiraient du reste très-facilement de l'équation précédente en employant les méthodes données par Legendre relativement aux fonctions X_n .

On a, par exemple, l'identité

$$e^x \sum \frac{z^n f_n(x)}{\Pi(n)} \sum \frac{t^m f_m(x)}{\Pi(m)} = \frac{e^{x(\frac{z}{1-z} + \frac{t}{1-t} + 1)}}{(1-z)(1-t)} = \frac{e^{\frac{1-tz}{(1-t)(1-z)}}}{(1-t)(1-z)},$$

d'où, en intégrant,

$$\int_{-\infty}^0 e^x \sum \frac{z^n f_n(x)}{\Pi(n)} \sum \frac{t^m f_m(x)}{\Pi(m)} dx = \frac{1}{1-tz} = 1 + tz + t^2 z^2 + \dots,$$

et de là résultent immédiatement les formules (5) et (6).

4. De la formule

$$\int_{-\infty}^0 e^{x(1+t)} f_n(x) dx = \Pi(n) \frac{t^n}{(1+t)^{n+1}},$$

on déduit, en dérivant m fois par rapport à t ,

$$\int_{-\infty}^0 e^{x(1+t)} x^m f_n(x) dx = \Pi(n) D^m \frac{t^n}{(1+t)^{n+1}},$$

d'où

$$\int_{-\infty}^0 e^{x(1+t)} x^m f_n(x) dx = \Pi_n \left[D^m \frac{t^n}{(1+t)^{n+1}} \right]_{t=0},$$

et, en supposant $m \geq n$,

$$\int_{-\infty}^0 e^x x^m f_n(x) dx = (-1)^{m-n} \frac{\Pi^2(m)}{\Pi(m-n)},$$

d'où le développement suivant :

$$x^m = (-1)^m \Pi(m) \left[f_0(x) - m f_1(x) + \frac{m(m-1)}{1^2 \cdot 2^2} f_2(x) - \frac{m(m-1)(m-2)}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} f_3(x) - \dots \right].$$

Cette formule, on le voit, se déduit de la formule (1) (où d'ailleurs se trouve le nombre entier n au lieu du nombre m) en changeant $f_n(x)$ en $(-x)^n$ et x^n en $(-1)^n f_n(x)$.

De là résulte que, si une fonction quelconque $\Phi(x)$, ordonnée suivant les puissances croissantes de x , s'exprime au moyen des polynômes $f_n(x)$ par la formule symbolique suivante :

$$\Phi(x) = \Theta(f),$$

où, dans le second membre, la puissance $n^{\text{ième}}$ de f doit être remplacée par f_n , on a aussi symboliquement

$$\Theta(-x) = \Phi(-f).$$

Sur une propriété remarquable des nombres incommensurables;
par M. STÉPHANOS.

(Séance du 14 février 1879.)

1. Nous allons faire connaître un mode de développement des nombres en série dont on peut tirer une propriété caractéristique des nombres incommensurables.

2. Pour évaluer un nombre quelconque, on peut employer un système de numération complexe qui se présente très-naturellement et qui admet pour unités successives

$$(1) \quad \frac{1}{1}, \quad \frac{1}{1.2}, \quad \frac{1}{1.2.3}, \quad \frac{1}{1.2.3.4}, \quad \dots$$

VII.

6

3. Suivant ce système de numération, tout nombre A sera représenté par une expression de la forme

$$(2) \quad A = \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1.2} + \frac{a_3}{1.2.3} + \frac{a_4}{1.2.3.4} + \dots,$$

où $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ seront des entiers non négatifs déterminés par les conditions

$$(3) \quad A - \frac{a_1}{1} - \frac{a_2}{1.2} - \dots - \frac{a_i}{1.2 \dots i} < \frac{1}{1.2 \dots i} \quad (i = 1, 2, 3, 4, \dots).$$

4. Il est évident que tout nombre A ne peut être représenté de cette façon que d'une seule manière.

On aperçoit de plus, aisément, que :

L'expression (2), qui représente, d'après le système de numération (1), un nombre quelconque A, a un nombre limité ou illimité de termes, suivant que le nombre A est commensurable ou non.

5. Les nombres entiers a_i , qui figurent dans l'expression (2) du nombre A, satisfont, en vertu des inégalités (3), aux conditions

$$(4) \quad a_i < i \quad (i = 2, 3, 4, \dots).$$

Étant donnée maintenant une expression indéfiniment prolongée

$$(5) \quad \frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1.2} + \frac{a_3}{1.2.3} + \frac{a_4}{1.2.3.4} + \dots,$$

satisfaisant aux conditions (4), on peut se demander si le nombre A qu'elle représente est incommensurable ou non, question qui revient à savoir si les nombres a_i satisfont ou non aux conditions (3) ou bien aux suivantes :

$$(6) \quad \frac{1}{1.2 \dots (i-1)} > \frac{a_i}{1.2 \dots i} + \frac{a_{i+1}}{1.2 \dots (i+1)} + \dots$$

6. Avant de répondre à cette question, on peut remarquer que le nombre représenté par l'expression particulière

$$\frac{k-1}{1.2 \dots k} + \frac{k}{1.2 \dots (k+1)} + \dots \quad (k > 1),$$

étant le plus grand nombre représentable par une expression de la forme

$$\frac{a_k}{1.2\dots k} + \frac{a_{k+1}}{1.2\dots(k+1)} + \dots \quad (k > 1),$$

où $a_i < i$, est précisément égal à $\frac{1}{1.2\dots(k-1)}$.

7. Cela étant, on peut conclure que :

Une expression indéfiniment prolongée de la forme

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{1.2} + \frac{a_3}{1.2.3} + \frac{a_4}{1.2.3.4} + \dots,$$

ou $a_i < i$, représente un nombre commensurable ou non, suivant que les nombres a_i sont, à partir d'un certain rang k , égaux toujours à $i - 1$ ou ne le sont pas.

Sur l'équation différentielle des coniques; par M. HALPHEN.

(Séance du 13 février 1879.)

Dans une Note insérée au Tome IV de ce *Bulletin*, j'ai indiqué un moyen de former immédiatement l'équation différentielle du cinquième ordre des coniques dans le plan. Je m'y fondais sur cette propriété, facile à reconnaître *a priori*, que l'équation ne doit contenir ni la variable indépendante, ni la fonction, ni sa dérivée première. Voici maintenant un nouveau procédé pour parvenir très-rapidement aussi à cette même équation. Soit

$$y = ax + b + \sqrt{Ax^2 + 2Bx + C}$$

l'équation d'une conique. Par deux dérivations, on obtient

$$y'' = (AC - B^2)(Ax^2 + 2Bx + C)^{-\frac{3}{2}}.$$

On en peut conclure que y'' , élevé à la puissance $-\frac{2}{3}$, est un polynôme du second degré arbitraire. Par suite, l'équation cherchée est la suivante :

$$\left(y''^{-\frac{2}{3}}\right)''' = 0,$$

6.

ou, développée,

$$(1) \quad 9y'''y'' - 45y''y'''y'' + 40y'''^3 = 0.$$

Remarquons, en passant, que l'équation $(y''^{-\frac{2}{3}})'' = 0$ serait l'équation différentielle des paraboles.

L'intégration de l'équation (1) n'est pas sans intérêt; on y trouve l'application de plusieurs procédés d'abaissement classiques. Si l'on prend y'' pour variable et y''' pour fonction, on obtient la transformée

$$y'' = \xi, \quad y''' = \eta, \quad 9\xi^3(\eta\eta' + \eta'^2) - 45\xi\eta\eta' + 40\eta^2 = 0.$$

Cette dernière est homogène en ξ, η ; elle l'est aussi en η, η', η'' . On a donc deux procédés pour l'abaisser au premier ordre. Prenons, par exemple, celui qui découle de la deuxième homogénéité. Il consiste à prendre une nouvelle fonction u en posant $\eta = e^{fu} d\xi$. La transformée est alors

$$9\xi^3(u' + 2u^2) - 45\xi u + 40 = 0.$$

Cette dernière est une de celles qui s'intègrent au moyen d'une intégrale particulière. Or il existe manifestement deux intégrales de la forme $u = A\xi^{-1}$, et l'on trouve effectivement, par substitution,

$$9A^2 - 27A + 20 = 0,$$

équation dont les racines sont $\frac{5}{3}$ et $\frac{4}{3}$. En achevant l'intégration, on obtient

$$u = \frac{1}{3\xi} \left(5 - \frac{1}{c\xi^{\frac{2}{3}} + 1} \right).$$

Par une quadrature, on a ensuite

$$\eta = c' \xi^{\frac{1}{3}} \left(1 + c\xi^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{1}{3}} = \frac{d\xi}{dx}.$$

Séparant les variables et effectuant la nouvelle quadrature, on parvient à cette nouvelle équation, en modifiant la constante c' ,

$$b(x+a)^2 = \frac{1 + c\xi^{\frac{2}{3}}}{\xi^{\frac{2}{3}}}$$

ou

$$y''^{-\frac{2}{3}} = b(x+a)^2 - c.$$

On retrouve ainsi la seconde des équations ci-dessus, exprimant que y'' est la puissance $-\frac{3}{2}$ d'un polynôme du second degré arbitraire. Deux quadratures ramènent ensuite l'équation finie qui a servi de point de départ.

Note sur la Géométrie des quinconces; par M. LAQUIÈRE.

(Séance du 28 mars 1879.)

Le *Bulletin* de 1878 contient divers articles fort intéressants de MM. Lucas, Laisant et de Polignac sur cette Géométrie, qui n'est autre, à proprement parler, que la peinture graphique de la théorie des nombres, à laquelle elle semble appelée à rendre les mêmes services que la Géométrie pure, ou le raisonnement sur les figures, rend à l'Algèbre ordinaire.

Cette Note, sans rien apprendre de nouveau sur la question, a pour objet de relier entre eux les travaux précités, en montrant que les résultats obtenus découlent d'une sorte de principe unique, qui, simplifiant les démonstrations, en rend à peu près le tout évident. En dégageant la démonstration des élégantes vérités dues à nos savants confrères de tout élément emprunté au calcul, quelle qu'en soit d'ailleurs la simplicité, nous croyons la mettre mieux en harmonie avec le sujet, qui n'est autre, nous le répétons, qu'une question particulière de la Géométrie pure (ou loi des formes concrètes et visibles), la branche représentative de la théorie des nombres, question particulière correspondante dans la théorie des grandeurs abstraites ou numériques.

En prenant comme unité de longueur le côté a d'une case dans l'échiquier indéfini, et la direction des deux côtés d'une case déterminée comme axes coordonnés, les sommets des diverses cases seront tous les points à coordonnées entières. Par suite, les couples de solutions entières de l'équation indéterminée $f(x, y) = 0$ seront les coordonnées des points de rencontre de la courbe $f = 0$ avec

les sommets de l'échiquier (ou des quinconces). Il est tout d'abord évident que les inclinaisons sur les axes de toute droite inscrite dans l'échiquier (c'est-à-dire joignant deux sommets de quinconces) seront commensurables, et, réciproquement, que toute inclinaison commensurable sera parallèle à une droite inscriptible dans les quinconces. Il en est de même, ainsi que l'ont démontré les articles précités, et qu'il va être appliqué d'ailleurs ci-après, de l'inclinaison de deux telles droites l'une sur l'autre. On peut d'ailleurs substituer aux sommets de cases leurs centres, ou encore considérer à la fois centres et sommets comme les *points* ou *sommets* d'un même système de quinconces, en diminuant de moitié l'unité de longueur.

Observons en premier lieu que toute droite à inclinaison commensurable sur les axes coordonnés, partant d'un sommet de quinconce, passe par une série de sommets ayant pour coordonnées, par rapport au premier pris pour origine, les équimultiples du numérateur et du dénominateur de la fraction irréductible exprimant l'inclinaison.

Complétons cette observation en remarquant que, une droite étant inscrite dans les quinconces, si on la prolonge de segments égaux à elle-même, tous les segments successifs seront également inscrits dans les quinconces; qu'enfin une droite de même longueur que la droite inscrite, et qui lui sera menée normalement par un des sommets, sera également inscrite dans les quinconces, puisque ses projections sur les axes, étant simplement permutées de longueur, aboutissent également à des sommets de quinconces. Il en résultera que les quinconces nouveaux construits sur un côté inscrit dans les premiers quinconces ont tous leurs sommets en des sommets du premier système.

Toute droite à inclinaison commensurable sur une droite inscrite dans le premier système de quinconces passe elle-même par une série de sommets des quinconces construits sur celle-ci, et par suite de sommets des quinconces du système primitif.

Soit un système A de quinconces dont la base a , dirigée suivant la droite A, est prise pour unité de longueur. Une droite B, d'inclinaison commensurable irréductible $\frac{m}{n}$, est l'alignement de sommets distants entre eux de $b = a\sqrt{m^2 + n^2}$. Le système B de

quinconces construits sur la base b , en grandeur et position, a tous ses sommets faisant partie des sommets du système A, les surfaces des cases ou quinconces étant a^2 et $a^2(m^2 + n^2)$ dans les deux systèmes. De même, si l'on considère une troisième droite C, d'inclinaison commensurable irréductible $\frac{p}{q}$ sur B, une longueur $c = b\sqrt{p^2 + q^2}$ dirigée suivant c , ayant un sommet commun avec a et b , sera la base d'un système de quinconces de surface

$$b^2(p^2 + q^2) = a^2(m^2 + n^2)(p^2 + q^2),$$

dont les sommets font partie de ceux du système B, et par suite de ceux du système A. Par conséquent, la droite C a sur la droite A une inclinaison commensurable, et l'on retrouve par le raisonnement géométrique cette base de la théorie des quinconces que : *Si deux angles ont leurs tangentes commensurables, il en est de même de l'angle égal à leur somme ou à leur différence.* La valeur de l'inclinaison du second côté du deuxième angle sur le premier du premier angle s'obtient du reste, sans intermédiaire, par l'évaluation des projections sur les deux axes des quinconces du premier système a , de la droite d'inclinaison $\frac{p}{q}$ sur le côté b du second système de quinconces incliné de $\frac{m}{n}$ sur le côté a .

D'après la construction ci-dessus expliquée, le côté b , inscrit dans les quinconces a , c'est-à-dire *ayant ses deux extrémités en deux sommets de ces quinconces*, le plus court possible, s'obtiendra si m et n sont premiers entre eux, comme hypoténuse du triangle rectangle des coordonnées égales à na et ma . De même le côté c , inscrit dans les quinconces b , aura qb et pb pour projections sur la droite B et sa perpendiculaire. On a donc pour projections, sur les axes des quinconces primitifs a , les valeurs

$$qna - pma,$$

$$qma + pna,$$

$$\text{Inclinaison } (c, a) = \frac{qm + pn}{qn - pm}.$$

Nous dirons que les systèmes de quinconces b et c (c'est-à-dire construits sur les côtés b et c en grandeur et position) sont dérivés

successifs du système a , et le système c est dérivé du système b .

Les diverses propriétés mises en lumière dans les articles que nous avons cités au début de cette Note deviennent désormais évidentes :

1° *Le carré d'une droite quelconque inscrite dans l'échiquier est commensurable*, puisque chacune des projections de la droite est elle-même commensurable, par suite également leurs carrés et la somme de ces derniers.

2° *Le produit d'une somme de deux carrés par une somme de deux autres carrés est toujours une somme exacte de deux carrés :*

$$(m^2 + n^2)(p^2 + q^2) = s^2 + t^2.$$

On peut toujours supposer m et n d'une part, p et q de l'autre, premiers entre eux, en faisant au préalable disparaître de l'équation les carrés des diviseurs communs qui affecteraient également comme coefficients les deux membres. Cela posé, $b = a\sqrt{m^2 + n^2}$ est inscrit dans l'échiquier de base a ; de même, $c = b\sqrt{p^2 + q^2}$ est inscrit dans l'échiquier b dérivé de a . Par conséquent,

$$c = a\sqrt{m^2 + n^2}\sqrt{p^2 + q^2}$$

est inscrit dans l'échiquier a , et ses projections s' et t' sur les axes de celui-ci sont des multiples entiers as et at de la base a , ce qui démontre le théorème.

Nous terminerons en montrant que la considération pure de l'échiquier permet d'arriver aux conclusions de M. de Polignac sur les solutions entières de l'équation indéterminée $ax + by = c$, sans l'emploi de la mosaïque à dalles rectangulaires, qui complique la question plutôt qu'il ne la simplifie. Faisons auparavant quelques remarques, évidentes d'ailleurs sur simple énoncé, qui compléteront les éléments de la Géométrie de l'échiquier dans l'ordre d'idées que nous avons adopté.

Toute droite inscrite dans les quinconces est, au point de vue de sa direction seule (abstraction faite de sa longueur), inscriptible dans tout système de quinconces dérivé du premier.

Deux droites inscrites dans un système de quinconces ont entre elles une inclinaison commensurable, l'une d'elles pouvant être

prise comme base d'un système dérivé du premier dans lequel la seconde serait inscriptible. En effet, de même que les sommets de tous les systèmes de quinconces dérivés successifs d'un système primitif font partie des sommets de ce dernier, de même, si pour un instant, laissant de côté la dimension des côtés, on ne se préoccupe que de leur direction, on pourra dire que le système primitif fait également partie d'un quelconque de ceux qui en sont dérivés; un renversement d'échelles entre les bases des deux systèmes permettrait, en effet, de déduire la construction du système primitif du système dérivé supposé construit, en montrant que sur l'alignement de ses sommets sur le côté issu d'un sommet commun se trouve une série de sommets des quinconces primitifs considérés.

Deux côtés inscrits dans un système de quinconces peuvent donc, au point de vue de leurs directions, être considérés comme inscriptibles dans un système quelconque de quinconces dérivés du premier, et en particulier de celui qui a l'un des deux côtés pour base.

Si l'on mène par l'un des sommets de quinconces une droite quelconque à inclinaison commensurable irréductible $\frac{m}{n}$ sur la base a , une longueur $a\sqrt{m^2+n^2}$ de cette oblique sera la base d'un système dérivé de quinconces dont tous les sommets feront partie du système primitif, mais avec un groupement $\frac{1}{m^2+n^2}$ fois moins serré.

De même que le second système dérive du premier en multipliant l'unité de surface par (m^2+n^2) et variant l'orientation de $\frac{m}{n}$, de même le système primitif peut être considéré comme dérivant du second par la variation $-\frac{m}{n}$ d'orientation, et la réduction de l'unité de longueur, base, dans le rapport de $\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}$.

De l'équation indéterminée $ax + by = c$.

Résoudre graphiquement l'équation $ax + by = c$ en nombres entiers revient uniquement à chercher les sommets des quinconces

à base unité situés sur la droite représentée en coordonnées cartésiennes par l'équation ci-dessus, deux côtés de quinconces étant pris pour axes.

Il n'y a donc qu'à construire la droite par ses coordonnées à l'origine $\frac{c}{a}$ et $\frac{c}{b}$ et à rechercher sur la droite ainsi posée les sommets de cases de l'échiquier indéfini, à côtés pris pour unité, qui s'y trouvent.

Et d'abord, si $a = Da'$, $b = Db'$, D étant le plus grand commun diviseur de a et b , les projections de la longueur inscrite de cette droite, ou distance de deux sommets consécutifs solutions, sont b' sur l'axe des X et a' sur l'axe des Y , l'inclinaison sur l'axe des X étant $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$.

Si donc x_1 et y_1 représentent un couple de valeurs correspondantes de x et de y , solutions entières, la série des couples de valeurs solutions sera évidemment, en montant pour y ,

$$\begin{array}{ccccccc} y_1, & y_1 + a', & y_1 + 2a', & y_1 + 3a', & \dots, & y_1 + na', \\ x_1, & x_1 - b', & x_1 - 2b', & x_1 - 3b', & \dots, & x_1 - nb', \end{array}$$

et de même, en descendant pour y ,

$$\begin{array}{ccccccc} y_1 - a', & y_1 - 2a', & \dots, & y_1 - na', \\ x_1 + b', & x_1 + 2b', & \dots, & x_1 + nb'. \end{array}$$

Le tout est ramené à trouver un couple de solutions, par exemple, comme M. de Polignac, la plus petite valeur entière de y , qui sera, je suppose, y_1 , la valeur de x_1 étant du reste positive ou négative suivant les valeurs relatives des coefficients de l'équation.

La construction géométrique de la droite d'appui des sommets solutions nous donnera, sans observations préalables, la règle trouvée par M. de Polignac.

Les segments sous-tendus sur l'axe des X et celui des Y par la droite $ax + by = c$ sont

$$OA = \frac{c}{a} \quad \text{et} \quad OB = \frac{c}{b}.$$

Soient S et T les sommets de quinconces successifs sur l'axe des X entre lesquels tombe le point A ; la longueur SA sera la

fraction qui complète la valeur de $\frac{c}{a}$ en l'ajoutant au plus grand entier OS qu'elle contienne. C'est ce que nous appellerons, avec M. de Polignac, $R\left(\frac{c}{a}\right)$, le reste de la division de c par a .

Soient I l'un quelconque des sommets solutions et H la projection de I sur OA. La similitude des triangles IHA et BOA donne

$$HA = HI \frac{b}{a} = \beta \frac{b}{a},$$

en désignant par β le nombre entier valeur de γ correspondante. Il en résulte que

$$R\left(\frac{\beta b}{a}\right) = R\left(\frac{c}{a}\right),$$

d'où la règle générale suivante :

Diviser par a les multiples successifs entiers de b . Ceux qui donneront un reste égal à celui de la division de c par a auront pour coefficient de multiplicité β les valeurs entières de γ solutions de l'équation. Les valeurs α correspondantes de x s'en déduiront sans peine.

Soit γ_1, x_1 le couple des valeurs correspondant à la plus petite valeur positive γ_1 de γ ; le nombre des solutions positives sera, d'après ce qui a été dit plus haut, égal à $(n + 1)$ si l'on désigne par n le plus grand entier satisfaisant à l'inégalité

$$x_1 - nb' > 0 \quad \text{ou bien} \quad n < \frac{x_1}{b'}.$$

Le nombre des solutions entières est alors d'une unité supérieur au plus grand entier contenu dans le quotient de x_1 par b' , ou, en employant la notation de M. de Polignac,

$$N = \left[\frac{x_1}{b'} \right] + 1.$$

Cette expression revient à celle donnée par lui; en effet,

$$\frac{x_1}{b'} = \frac{c - b\gamma_1}{ab'} = \frac{c - b\gamma_1}{a'b} = \frac{\frac{c}{a} - \gamma_1}{b'}.$$

d'où

$$N = \left(\frac{\left[\frac{c}{b} \right] - \gamma_1}{a'} \right) + 1,$$

expression que l'on trouve également à la simple inspection de la figure ci-dessus, le nombre des solutions étant d'une unité supérieur au plus grand nombre de fois que l'on peut ajouter a' à γ sans dépasser OB, soit le plus grand entier $\left[\frac{c}{b} \right]$ contenu dans OB, puisque les valeurs successives de γ croissent de a' .

Sur le développement d'une fonction intermédiaire;
par M. HALPHEN.

(Séance du 28 mars 1879.)

On sait que la fonction Al_1 de M. Weierstrass se développe, suivant les puissances croissantes de l'argument, en une série dont les coefficients sont des polynômes entiers par rapport au carré du module. Ces polynômes se calculent successivement au moyen d'une formule récurrente qui en contient trois consécutifs. Je me propose de montrer que des polynômes analogues, se calculant de la même manière, et qui sont les coefficients d'une fonction très-peu différente, sont susceptibles de recevoir une forme notablement plus simple.

La fonction que je considère ici est la suivante :

$$(1) \quad B(z, k) = Al_1(z, k) e^{\frac{1}{2}(1+k^2)z^2}$$

Envisageons d'abord la fonction

$$F(z, k) = \frac{1}{z} B(z, k).$$

Des deux formules connues

$$Al_1(z, k) = \frac{1}{k} Al_1\left(kz, \frac{1}{k}\right) = -ie^{-\frac{1}{2}z^2} Al_1(iz, k')$$

on conclut, pour la fonction F , ces nouvelles formules

$$(2) \quad F(z, k) = F\left(kz, \frac{1}{k}\right) = F(iz, k').$$

La fonction F , qui est paire, se développera ainsi :

$$F(z, k) = 1 + f_1 z^2 + f_2 z^4 + \dots + f_n z^{2n} + \dots$$

et les coefficients f , fonctions entières de k^2 , jouiront, en vertu de (2), de la propriété

$$(3) \quad f_n(k^2) = k^{2n} f_n\left(\frac{1}{k^2}\right) = (-1)^n f_n(1 - k^2).$$

Envisageons maintenant les deux polynômes p et q suivants :

$$(4) \quad p(k^2) = k^4 - k^2 + 1, \quad q(k^2) = (k^2 + 1)(k^2 - 2)(2k^2 - 1),$$

qui donnent lieu aux égalités

$$(5) \quad \begin{cases} p(k^2) = k^4 p\left(\frac{1}{k^2}\right) = p(1 - k^2), \\ q(k^2) = k^6 q\left(\frac{1}{k^2}\right) = -q(1 - k^2). \end{cases}$$

De ces deux égalités on tire d'abord aisément cette conclusion connue, que toute fonction rationnelle de k^2 qui reste inaltérée quand on y remplace k^2 par son inverse ou son complément à l'unité est simplement une fonction rationnelle du quotient $p^2 : q^2$. Soient maintenant α, β deux nombres entiers satisfaisant à la condition $2\alpha + 3\beta + n = 0$, et envisageons la quantité $\varphi_n = p^\alpha q^\beta f_n$. Comme β est de même parité que n , il résulte des équations (3) et (5) que φ_n reste inaltérée par les deux substitutions ci-dessus. Donc φ_n est une fonction rationnelle de $p^2 : q^2$. Donc f_n , qui est une fonction entière de k^2 , est une fonction entière des deux quantités p, q ; on peut même ajouter que f_n est un polynôme entier des deux quantités p, q , homogène et du degré n quand on envisage p comme du second degré et q comme du troisième.

Cette conclusion s'applique aux coefficients du développement de la fonction B , qui sont les mêmes, et l'on peut dire que la fonction $B(z, k)$ est homogène et de degré $-\frac{1}{2}$, quand on envi-

sage z comme de degré $-\frac{1}{2}$, p comme du second degré et q comme du troisième.

Je représenterai le développement de B par

$$(6) \quad B(z, k) = z + b_1 \frac{z^3}{1.2.3.4.5} + \dots + b_n \frac{z^{2n+1}}{1.2 \dots (2n+1)} + \dots$$

D'après ce qui vient d'être dit, b_n contient seulement les termes $p^\alpha q^\beta$ correspondant aux solutions entières et positives de

$$2\alpha + 3\beta = n.$$

En conséquence, b_1 est nul; c'est pourquoi je n'ai pas écrit de terme en z^3 dans (6). Ainsi l'on voit immédiatement que b_2, b_3, b_4, b_5 seront, à des facteurs numériques près, p, q, p^2, pq . D'une manière générale :

Si n n'est pas divisible par 3, b_n contient le facteur p ;

Si n est impair, b_n contient le facteur q .

Par conséquent, dans le cas où le module satisfait à

$$k^4 - k^2 + 1 = 0,$$

on a

$$B(z) = z + az^7 + bz^{13} + \dots + lz^{6n+1} + \dots$$

dans le cas où le module est $\sqrt{-1}$, on a

$$B(z) = z + a'z^5 + b'z^9 + c'z^{13} + \dots + l'z^{4n+1} + \dots$$

Je vais maintenant établir une formule récurrente pour le calcul des polynômes b_n .

A cet effet, je prends l'équation linéaire aux dérivées partielles et du second ordre à laquelle satisfait la fonction Al_1 , savoir

$$\frac{\partial^2 Al_1}{\partial z^2} + 2k^2 z \frac{\partial Al_1}{\partial z} + 2kk'^2 \frac{\partial Al_1}{\partial k} + (k'^2 + k^2 z^2) Al_1 = 0.$$

En y introduisant la fonction B , je la change en l'équation suivante :

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} + 2 \frac{2k^2 - 1}{3} z \frac{\partial B}{\partial z} + 4k^2 (1 - k^2) \frac{\partial B}{\partial k^2} \\ & + 2 \left(\frac{1 - 2k^2}{3} + \frac{k^4 - k^2 + 1}{9} z^2 \right) B = 0. \end{aligned} \right.$$

C'est cette dernière qu'il faut transformer en y remplaçant k^2 par p, q . Tout d'abord les équations (4) donnent

$$(8) \quad 2k^2 - 1 = \frac{q}{p-3},$$

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial k^2} = \frac{q}{p-3} \frac{\partial}{\partial p} + 3(2p-3) \frac{\partial}{\partial q},$$

$$(10) \quad q^2 = (p-3)^2(4p-3).$$

Dans (7), je remplace $\frac{\partial B}{\partial k^2}$ par l'expression que fournit la formule (9), k^2 par son expression (8), et j'obtiens

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} + \frac{2}{3} \frac{q}{p-3} \left[z \frac{\partial B}{\partial z} - B - 6(p-1) \frac{\partial B}{\partial p} \right] \\ - 12(p-1)(2p-3) \frac{\partial B}{\partial q} + \frac{pz^2}{9} B = 0. \end{aligned} \right.$$

En vertu de l'homogénéité de la fonction B, j'ai

$$3q \frac{\partial B}{\partial q} + 2p \frac{\partial B}{\partial p} - \frac{1}{2} z \frac{\partial B}{\partial z} = -\frac{1}{2} B.$$

Cette relation permet de faire disparaître $\frac{\partial B}{\partial z}$ de (11) et d'écrire, en tenant compte de (10),

$$(12) \quad \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} - 8p^2 \frac{\partial B}{\partial q} - \frac{4}{3} q \frac{\partial B}{\partial p} + \frac{pz^2}{9} B = 0.$$

Telle est la transformée cherchée. Elle donne immédiatement une formule récurrente pour les coefficients du développement de B, formule dont les coefficients se simplifient un peu si l'on pose

$$x = \frac{2}{3} p = \frac{2}{3} (k^4 - k^2 + 1),$$

$$y = \frac{2}{9} q = \frac{2}{9} (k^2 + 1)(k^2 - 2)(2k^2 - 1).$$

La formule définitive est la suivante :

$$(13) \quad b_n = 4 \left(x^2 \frac{\partial b_{n-1}}{\partial y} + y \frac{\partial b_{n-1}}{\partial x} \right) - \frac{(n-1)(2n-1)}{3} x b_{n-2}.$$

Au moyen de cette formule, on calcule avec la plus grande faci-

lité les coefficients successifs, dont voici les premiers :

$$b_0=1, \quad b_1=0, \quad b_2=-x, \quad b_3=-4y, \quad b_4=-9x^2, \quad b_5=-24xy, \\ b_6=-3.2^5y^2+3.23x^3, \quad b_7=2^3.3^3.19x^2y, \quad b_8=3x(2^7.23y^2+107x^3).$$

Addition. — J'avais déjà livré à l'impression la Note qu'on vient de lire quand mon attention s'est trouvée attirée sur deux Mémoires qui m'étaient inconnus, bien qu'ils ne soient pas tout récents. Le premier, intitulé *Wirkliche Ausführung der ganzzahligen Multiplication der elliptischen Functionen*, est dû à M. Kiepert et se trouve au Tome 76 (année 1873) du *Journal de M. Borchardt*; le second, intitulé *Ganzzahlige Multiplication der elliptischen Functionen in Verbindung mit dem Schliessungsproblem*, est dû à M. Max Simon et se trouve au Tome 81 (année 1876) du même Recueil. Ces deux savants auteurs donnent pour point de départ à leurs recherches personnelles des résultats dus à M. Weierstrass, communiqués dans ses Cours à ses élèves par cet illustre géomètre, mais connus du public seulement grâce aux deux Mémoires que je viens de citer. Les résultats dont il s'agit se rapportent à une théorie des fonctions elliptiques dans laquelle, au lieu du sinus d'amplitude, on introduit systématiquement la fonction $p(z)$, définie par

$$(14) \quad z = \int_{\infty}^{p(z)} \frac{du}{\sqrt{4u^3 - g_2u - g_3}}.$$

Voici quel est le point de départ de cette théorie. Soit

$$w = 2m\omega + 2n\omega'$$

une quantité dans laquelle, ω et ω' étant fixes, m et n reçoivent successivement tous les systèmes de valeurs entières, positives ou négatives, sauf le système $m = n = 0$. On considère la fonction

$$(15) \quad \sigma(z) = z \prod \left(1 - \frac{z}{w}\right) e^{\frac{z}{w} + \frac{1}{2}\frac{z^2}{w^2}},$$

qui est intermédiaire. Effectivement, si l'on désigne par $\zeta(z)$ la dérivée logarithmique de $\sigma(z)$, la fonction $\zeta'(z)$ admet les périodes ω et ω' . Cela résulte immédiatement de la formule (15).

Par une analyse assez courte, on prouve ensuite que, si l'on pose

$$\begin{aligned} g_2 &= 2[\zeta'^2(\omega) + \zeta'^2(\omega') + \zeta'^2(\omega + \omega')], \\ g_3 &= -4\zeta'(\omega)\zeta'(\omega')\zeta'(\omega + \omega'), \end{aligned}$$

la fonction $p(z)$ définie par (14) coïncide avec celle-ci :

$$(16) \quad p(z) = -\zeta'(z) = -\frac{\partial^2 \log \sigma(z)}{\partial z^2}.$$

Ceci posé, M. Max Simon rapporte comme due à M. Weierstrass et démontre, avec le point de départ que je viens d'indiquer, l'équation suivante à laquelle satisfait la fonction $\sigma(z)$:

$$(17) \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} - \frac{2}{3} g_2^2 \frac{\partial \sigma}{\partial g_3} - 12 g_3 \frac{\partial \sigma}{\partial g_2} + \frac{1}{12} g_2 z^2 \sigma = 0,$$

dont la ressemblance avec mon équation (12) est frappante. Ces deux équations coïncident même si l'on fait

$$(18) \quad p = \frac{3}{4} g_2, \quad q = \frac{27}{4} g_3$$

et qu'on remplace B par σ . Les deux fonctions $B(z)$ et $\sigma(z)$, développées suivant les puissances croissantes de z , commencent toutes deux par le même terme z . Donc, eu égard à la formule récurrente (13), sous le bénéfice des équations (18), les fonctions $B(z)$ et $\sigma(z)$ coïncident.

Cette coïncidence peut être démontrée autrement. Posons

$$(19) \quad v = \operatorname{Sn} z = -\left(u + \frac{1+k^2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

et introduisons la variable u sous le signe d'intégration dans l'égalité

$$z = \int_0^v \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-k^2 v^2)}}.$$

Le calcul fait, on retrouve dans le polynôme soumis au radical les quantités p et q définies par les équations (4); voici le résultat :

$$z = \int_x^u \frac{du}{\sqrt{4u^3 - \frac{2}{3}pu - \frac{1}{27}q}}.$$

C'est précisément l'équation (14) si l'on remplace p et q par les expressions (18). J'ai donc ainsi prouvé l'égalité suivante, transformée de (19):

$$p(z) = \frac{1}{\sin^2 z} - \frac{1+k^2}{3},$$

qui, suivant la définition de la fonction A_1 , de la fonction B et la définition de σ fournie par (16), devient

$$\frac{\partial^2 \log \sigma(z)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \log B(z)}{\partial z^2}.$$

Cette dernière prouve maintenant l'identité des deux fonctions σ et B , sans l'intervention de l'équation (17). En conséquence, mon analyse fournit une démonstration de cette équation (17), très-différente de celle qu'a rapportée M. Max Simon.

Sur une méthode d'approximation des racines carrées, connue dans l'Inde antérieurement à la conquête d'Alexandre; par M. L. RODET.

(Séance du 28 mars 1879.)

L'auteur persan Hassan ben al-Hossein al-Hakák al-Morouzi (c'est-à-dire natif de Merv en Khorassan), dans un Traité d'Arithmétique qu'il a composé en l'an 613 de l'hégire ou 1216 de notre ère « pour répondre aux demandes de ses amis », donne le procédé suivant pour obtenir une approximation d'une *racine carrée sourde*. Lorsqu'on a, par le moyen connu, obtenu la racine cherchée à une unité près *par défaut*, « on divise le reste de l'opération par le double de la racine trouvée *plus un*, et la racine se compose de la partie entière et de cette fraction ». Ainsi

$$\sqrt{12} = 3 \frac{3}{7}, \quad \sqrt{145} = 12 \frac{1}{25}.$$

Ce procédé n'est pas difficile à justifier; en effet, si nous désignons par N le nombre proposé, par a sa racine à une unité près,

et par r le reste de l'opération, de telle sorte que $N = a^2 + r$; si, de plus, nous appelons ε le complément de la racine, on a

$$r = (2a + \varepsilon)\varepsilon \quad \text{ou} \quad \varepsilon = \frac{r}{2a + \varepsilon};$$

comme toujours $\varepsilon < 1$, on aura une approximation par défaut de sa valeur en le remplaçant par 1 au dénominateur de la fraction, c'est-à-dire en posant

$$\varepsilon_1 = \frac{r}{2a + 1}.$$

C'est la première fois que j'ai rencontré cette méthode d'approximation chez un auteur oriental, et, bien que je l'eusse trouvée assez remarquable pour l'époque où il vivait, je n'y aurais probablement prêté qu'une médiocre attention si je n'avais été amené à penser que ce procédé devait avoir été pratiqué couramment dans l'Inde, et même dès une époque très-reculée.

Al-Morouzi ayant donné $\sqrt{12} = 3\frac{3}{7}$, je fus naturellement amené à voir que, dans ce système, $\sqrt{10} = 3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$, c'est-à-dire la valeur donnée par Archimède pour le nombre π , seule valeur en usage pendant longtemps chez les Grecs : c'est en effet la seule dont se sert Héron le Jeune dans son Traité des surfaces et des volumes.

Mais, puisque $\frac{22}{7} = \sqrt{10}$, nous comprenons maintenant pourquoi l'astronome indien Brahmagupta enseignait à ses disciples (*voir* traduction de Colebrooke, n° 40, deuxième partie de la règle) que « la racine de 10 fois le carré du diamètre est la longueur de la circonférence; la racine de 10 fois le demi-diamètre (rayon), multipliée par ce demi-diamètre lui-même, est l'aire du cercle ». Dans la première partie de cette règle, il faisait multiplier le diamètre dans le premier cas, le carré du rayon dans le second cas, par 3, et donnait cette évaluation comme « usuelle » ou « vulgaire » (*vyāvahārika*); la seconde, qui fait $\pi = \sqrt{10}$, est, par opposition, appelée *sūxma*, « fine, subtile », et peut-être « raffinée ». On s'était demandé, et moi-même après bien d'autres, où Brahmagupta avait été chercher cette valeur de π , qu'il regardait

comme pour ainsi dire exacte. L'écrivain persan que j'ai cité nous en a donné l'explication. Seulement $\pi = \frac{22}{7}$ est une approximation *par excès*; $\sqrt{10} = \frac{22}{7}$ est une approximation *par défaut*. Peut-être Brahmagupta, dans son enseignement oral, savait-il faire faire cette distinction à ses élèves.

Puisque l'exemple emprunté à Brahmagupta me donnait lieu de penser que les Indiens avaient connu et pratiqué le mode d'approximation des racines carrées dont je parle, il m'est venu à l'idée d'étudier à ce point de vue une valeur de $\sqrt{2}$ donnée dans *les Préceptes du cordeau* de Baudhâyana, ouvrage curieux, composé probablement au IV^e siècle avant notre ère, et qui contient les règles que doivent observer les brahmanes pour construire leurs autels. Cette valeur de $\sqrt{2}$, dont l'interprétation m'avait également beaucoup préoccupé, est

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}.$$

Cette forme de *série* m'avait surtout paru originale.

Or, si nous appliquons à $\sqrt{2}$ la méthode en question, nous aurons à faire

$$N = 2, \quad a = 1, \quad r = 1, \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}.$$

Le premier terme fractionnaire de la série de notre brahmane est donc bien obtenu par la méthode du Persan; $1 + \frac{1}{3}$ est une valeur approchée *par défaut* de la racine cherchée.

Continuons l'opération : il nous faut calculer

$$r' = r - (2a + \varepsilon_1)\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2 = \frac{r'}{2(a + \varepsilon_1) + \varepsilon_2},$$

ce qui nous donne

$$r' = 1 - \left(2 + \frac{1}{3}\right) \frac{1}{3} = 1 - \frac{7}{9} = \frac{2}{9},$$

$$\varepsilon_2 = \frac{2}{9} : \left[2 \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \varepsilon_2\right] = \frac{2}{9} : \left(\frac{8}{3} + \varepsilon_2\right).$$

Or notre deuxième terme est

$$\frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{8},$$

et l'auteur a, cette fois, négligé ϵ_2 au dénominateur de sa fraction diviseur et obtenu une approximation *par excès* de $\sqrt{2}$ dans la série

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4}.$$

Si nous poursuivons encore l'opération, nous verrons que la quantité à retrancher de $r' = \frac{2}{9}$ pour avoir r'' est $\frac{33}{144}$. Or $\frac{2}{9} = \frac{32}{144}$; par suite, $r'' = -\frac{1}{144}$.

Je donne ce résultat sous cette forme négative, parce que j'ai fait voir autre part que les Indiens ont eu de très-bonne heure la notion des *nombre négatifs* et qu'ils ne se préoccupaient pas, dans leurs calculs, du signe du résultat.

D'autre part, le double de la nouvelle racine étant $\frac{34}{12}$, nous aurons

$$\epsilon_3 = \left(-\frac{1}{144}\right) : \frac{34}{12} = -\frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}.$$

Et remarquons que, ce terme correctif étant trop grand en valeur absolue, l'expression

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}$$

est de nouveau approchée *par défaut*.

Rien n'empêcherait de continuer le calcul, et rien ne dit que, lorsqu'ils en ont eu besoin, les auteurs de cette série de quatre termes n'aient su poursuivre l'opération.

Nous pouvons donc conclure de là qu'à l'époque où vivait Baudhâyana, c'est-à-dire à peu près au IV^e siècle avant notre ère, on savait exprimer la valeur d'une racine carrée sourde (ou irrationnelle, comme nous persistons à vouloir dire) au moyen d'une série approchée alternativement *par excès* et *par défaut*; que le moyen d'obtenir le premier terme de cette série était de diviser le

reste de l'opération qui avait fourni la racine à une unité près par le double de cette racine augmenté d'un. Les termes suivants, alternativement positifs et négatifs, s'obtenaient par un procédé qui n'est autre que celui que nous connaissons aujourd'hui sous le nom de *méthode d'approximation de Newton*.

J'ajouterai, pour terminer, qu'Al-Mourouzi applique son même procédé (borné au premier terme de la série) aux racines cubiques.

Ici $\varepsilon = \frac{r}{3a^2 + 3a\varepsilon + \varepsilon^2}$; il y fait encore $\varepsilon = 1$ et a $\varepsilon_1 = \frac{r}{3a^2 + 3a + 1}$.

Comme exemple numérique, il donne

$$\sqrt[3]{1748} = 12 \frac{20}{469}.$$

J'ignore, du reste, si l'on rencontrerait chez les auteurs indiens des exemples d'application de ce procédé, si, comme pour la racine carrée, ils continuaient à développer une série, et si, comme dans la méthode de Newton, les termes suivants de la série seraient de la forme

$$\varepsilon_n = \frac{r_n}{3a_{n-1}^2}.$$

Sur une classe de fonctions non uniformes; par M. E. PICARD.

(Séance du 28 mars 1879.)

Considérons une fonction multiforme $f(z)$ d'une variable complexe z , n'admettant dans tout le plan que des points critiques déterminés. Dans toute région du plan à contour simple ne contenant aucun de ces points, la fonction est uniforme et continue. Soit A l'un de ces points critiques. Je me propose de montrer que l'on peut trouver un développement en série de la fonction, valable pour tous les points du cercle ayant A pour centre et passant par le point critique le plus rapproché, quel que soit d'ailleurs le chemin suivi par la variable à l'intérieur de ce cercle. Nous supposons que A est l'origine des coordonnées et que de plus le rayon du cercle précédent est plus petit que l'unité, cette dernière circonstance pouvant toujours se réaliser par un

changement de variable $z' = kz$, où k est un nombre positif suffisamment petit.

Ceci posé, je fais la transformation

$$z' = \frac{1}{\log z}.$$

Cherchons quelle est la portion du plan des z' correspondant au cercle C décrit, dans le plan des z , de l'origine comme centre avec un rayon égal à r . En désignant par θ l'argument d'un point de ce cercle, et par lr le logarithme arithmétique de r , nous avons

$$x' + iy' = \frac{1}{lr + \theta i};$$

donc

$$x' = \frac{lr}{(lr)^2 + \theta^2}, \quad y' = \frac{-\theta}{(lr)^2 + \theta^2},$$

et l'on a par suite, en éliminant θ ,

$$(C') \quad (x'^2 + y'^2)lr - x' = 0,$$

équation d'un cercle passant à l'origine et dont le centre est le point $x' = +\frac{1}{2lr}$. De plus, si r est, comme nous le supposons, moindre que l'unité, aux points à l'intérieur du cercle C correspondent les points à l'intérieur du cercle C'. La fonction $f(z)$ deviendra une fonction $F(z')$. A toute courbe fermée située à l'intérieur du cercle C' correspondra une courbe fermée située dans C, qui ne comprendra pas l'origine dans son intérieur. Par suite, la fonction $F(z')$ sera uniforme et continue à l'intérieur de C', et l'on pourra la développer en une série procédant suivant les puissances croissantes de $\left(z' - \frac{1}{2lr}\right)$.

Nous aurons par suite, pour $f(z)$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \left(\frac{1}{\log z} - \frac{1}{2lr} \right)^n,$$

où les A_n sont des constantes.

Ce développement est valable pour tous les points du cercle C.

Aux déterminations multiples de $\log z$ correspondront les déterminations multiples de la fonction quand la variable z , partant d'un point, décrit à l'intérieur de C un chemin embrassant une ou plusieurs fois l'origine.

Les intégrales des équations linéaires à coefficients uniformes nous présentent un exemple bien connu de fonctions rentrant dans la classe de celles que nous venons de considérer. On sait, en effet, que ces intégrales n'ont d'autres points singuliers que les points singuliers des coefficients de l'équation.

Une classe de fonctions se rattachant de très-près à celle que nous venons de considérer est celle des fonctions multiformes ayant des points critiques déterminés, mais pouvant avoir en outre un nombre quelconque de pôles situés d'une manière quelconque. On voit alors facilement qu'à l'intérieur du cercle de rayon r la fonction $f(z)$ peut se mettre sous la forme

$$f(z) = \frac{\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \left(\frac{1}{\log z} - \frac{1}{2lr} \right)^n}{\sum_{n=0}^{n=\infty} B_n \left(\frac{1}{\log z} - \frac{1}{2lr} \right)^n},$$

où les A_n et les B_n sont des constantes.

Il est aisé d'indiquer des équations différentielles dont les intégrales jouissent des propriétés précédentes. L'exemple le plus simple que l'on puisse citer est l'équation de Bernoulli :

$$\frac{du}{dz} = Xu^2 + X_1u + X_2,$$

où nous supposons que les X soient des fonctions uniformes de z . Les intégrales de cette équation n'auront d'autres points critiques que les points singuliers des fonctions uniformes X, X_1, X_2 , mais elles peuvent avoir des pôles situés d'une manière quelconque.

Sur les équations différentielles linéaires. (Extrait d'une Lettre de M. BRIOSCHI à M. LAGUERRE.)

(Séance du 11 avril 1879.)

.... Les Communications que vous avez faites récemment à l'Académie des Sciences, *Sur quelques invariants des équations différentielles linéaires*, ont eu pour moi un grand intérêt, ayant dû autrefois m'occuper de questions analogues. Malheureusement je ne peux pas en ce moment revenir sur ce sujet; mais je désire vous faire connaître la méthode que j'avais suivie, laquelle me paraît conduire facilement à vos résultats et peut-être les compléter.

Soient les deux équations différentielles linéaires du troisième ordre

$$y''' + 3ly' + my = 0, \quad \frac{d^3 u}{dz^3} + 3\lambda \frac{du}{dz} + \mu u = 0,$$

où

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad \dots$$

Je pose

$$y = vu,$$

v étant fonction de x .

On a

$$y' = v \frac{du}{dz} z' + v' u,$$

$$y'' = v \left(\frac{d^2 u}{dz^2} z'^2 + \frac{du}{dz} z'' \right) + 2v' \frac{du}{dz} z' + v'' u, \quad \dots$$

En substituant les y' , y'' , y''' dans la première équation différentielle, on doit obtenir la seconde, et, par conséquent, on arrive aux trois relations

$$(1) \quad \begin{cases} vz'' + v' z' = 0, \\ vz''' + 3v' z'' + 3v'' z' + 3lvz' = 3\lambda v z^3, \\ v''' + 3lv' + mv = \mu v z^3. \end{cases}$$

Or, en posant $\frac{z''}{z} = Z$, la première donne

$$v' = -Zv,$$

et, par suite,

$$v'' = -(Z' - Z^2)v, \quad v''' = -(Z'' - 3ZZ' + Z^3) \cdot v.$$

D'autre part,

$$\frac{z'''}{z'} = Z' + Z^2;$$

la seconde des équations (1) se transforme donc ainsi qu'il suit :

$$(2) \quad 2Z' = Z^2 + 3(l - \lambda z'^2),$$

et la troisième devient

$$Z'' - 3ZZ' + Z^3 + 3lZ - (m - \mu z'^3) = 0.$$

Enfin, en remplaçant dans celles-ci Z' et Z'' par leurs valeurs déduites de l'équation (2), on trouve votre relation

$$\left(3 \frac{d\lambda}{dz} - 2\mu\right) z'^3 = 3l' - 2m.$$

Je pose

$$(3) \quad 3 \frac{d\lambda}{dz} - 2\mu = \alpha \quad \text{et} \quad 3l' - 2m = a,$$

d'où l'on déduit

$$\alpha z'^3 = a.$$

On a

$$3Z = \frac{d \log a}{dx} - \frac{d \log \alpha}{dz} z'.$$

Cette valeur de Z , substituée dans l'équation (2), conduit très-facilement à la relation suivante :

$$\beta z'^2 = b,$$

où j'ai posé, pour abréger,

$$6 \frac{d^2 \log \alpha}{dz^2} - \left(\frac{d \log \alpha}{dz} \right)^2 - 2\gamma \lambda = \beta$$

et

$$6 \frac{d^2 \log a}{dx^2} - \left(\frac{d \log a}{dx} \right)^2 - 2\gamma l = b.$$

On aura enfin, par conséquent,

$$\frac{\beta^3}{\alpha^3} = \frac{b^3}{a^3},$$

relation *invariantive* entre les seuls coefficients des deux équations différentielles et leurs dérivées.

Il est très-important de noter que ces formes invariantives restent les mêmes pour les équations différentielles d'ordre supérieur.

Par exemple, pour les équations différentielles du quatrième ordre

$$y^{iv} + 6ly'' + 4my' + ny = 0$$

et

$$\frac{d^4 u}{dz^4} + 6\lambda \frac{d^3 u}{dz^3} + 4\mu \frac{du}{dz} + \nu u = 0,$$

on trouve

$$v' = -\frac{3}{2}Zv, \quad 2Z' = Z^2 + \frac{12}{5}(l - \lambda z'^2),$$

$$Z'' - 3ZZ' + Z^3 + \frac{12}{5}lZ - \frac{4}{5}(m - \mu z'^2) = 0,$$

et, par suite,

$$\alpha z'^2 = a,$$

α et a étant définis par les équations (3).

En posant

$$6 \frac{d^2 \log \alpha}{dz^2} - \left(\frac{d \log \alpha}{dz} \right)^2 - \frac{108}{5} \lambda = \beta,$$

$$6 \frac{d^2 \log a}{dz^2} - \left(\frac{d \log a}{dz} \right)^2 - \frac{108}{5} l = b,$$

on en déduit

$$\beta z'^2 = b \quad \text{et} \quad \frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Enfin la dernière équation donne

$$\gamma z'^4 = c,$$

où

$$\gamma = 30 \frac{d^2 \lambda}{dz^2} - 50 \frac{d\mu}{dz} - 81 \lambda^2 + 25 \nu,$$

et

$$c = 30 l'' - 50 \mu' - 81 l^2 + 25 n.$$

J'ajoute une dernière remarque. Si, pour les équations différentielles du troisième ordre, l'invariant a est nul, l'équation se réduit à la suivante, du second ordre,

$$\xi'' + \frac{3}{4} l \xi = 0,$$

où

$$y = \xi^3.$$

Si, pour l'équation du quatrième ordre, les invariants a et c sont nuls, on a

$$\xi'' + \frac{3}{5} \xi = 0,$$

équation où j'ai posé

$$y = \xi^3.$$

Si vous croyez que ces résultats peuvent avoir quelque intérêt pour nos collègues de la Société mathématique, vous pouvez les leur communiquer....

Sur quelques propriétés de l'hypocycloïde à trois points de rebroussement; par M. LAGUERRE.

(Séance du 11 avril 1879.)

I.

1. Soient OX et OY deux axes rectangulaires, et X, Y les coordonnées d'un point quelconque M du plan relativement à ce système d'axes; posons

$$X + Yi = x \quad \text{et} \quad X - Yi = y;$$

nous pouvons considérer x et y comme de nouvelles coordonnées du point M. On voit que les équations $x = \alpha$ et $y = \beta$, où α et β désignent des quantités constantes arbitraires, représentent les diverses droites isotropes du plan; je désignerai donc, pour abrégé, le système de coordonnées que je viens de définir sous le nom de *coordonnées isotropes*.

Dans un pareil système, le coefficient angulaire d'une droite faisant avec l'axe OX un angle donné V est égal à e^{-2Vi} ; l'équation de l'axe OX est

$$x = y,$$

et l'équation d'un cercle de rayon R et ayant pour centre le point

(α, β) est

$$(x - \alpha)(y - \beta) = R^2.$$

2. Étant donnée une courbe de $n^{\text{ième}}$ classe, les coefficients angulaires des tangentes que d'un point (x, y) on peut mener à cette courbe sont donnés par une équation homogène du degré n ,

$$U(\lambda, \mu) = 0;$$

dans cette équation, $\frac{\mu}{\lambda}$ désigne le coefficient angulaire de la tangente issue du point (x, y) , et les coefficients du polynôme U sont des fonctions entières de x et de y .

L'équation précédente est, en me servant d'une dénomination que j'ai déjà employée dans plusieurs travaux antérieurs ⁽¹⁾, l'équation mixte de la courbe.

3. L'hypocycloïde à trois points de rebroussement étant définie comme une courbe de troisième classe qui touche aux deux ombilics la droite de l'infini, on voit immédiatement que son équation mixte est de la forme

$$a\lambda^3 + b\lambda^2\mu + c\lambda\mu^2 + d\mu^3 + \lambda\mu(\lambda y - \mu x) = 0.$$

Cherchons le lieu des points du plan d'où l'on voit l'hypocycloïde sous un angle droit; il faut, pour cela, exprimer que l'équation précédente a deux racines égales et de signes contraires.

Le lieu cherché a donc pour équation

$$(c - x)(b + y) = ad;$$

elle représente, comme on le sait, un cercle. En mettant en évidence le rayon R de ce cercle et les coordonnées α et β de son centre, je poserai

$$c = \alpha, \quad b = -\beta, \quad a = R e^{-\varphi i} \quad \text{et} \quad d = -R e^{\varphi i}.$$

L'équation mixte de la courbe deviendra donc

$$(1) \quad R e^{-\varphi i} \lambda^3 - \beta \lambda^2 \mu + \alpha \lambda \mu^2 - R e^{\varphi i} \mu^3 + \lambda \mu (\lambda y - \mu x) = 0.$$

4. Je vais chercher maintenant l'équation mixte des diverses

(1) *Mémoire de Géométrie analytique*, 2^e série, t. XVII.

hypocycloïdes qui touchent l'axe OX et rencontrent cet axe en deux autres points équidistants de l'origine O.

L'axe OX étant tangent à la courbe, une des tangentes issues de l'origine a pour coefficient angulaire l'unité; l'équation (1) est donc satisfaite quand on y fait

$$x = 0, \quad y = 0 \quad \text{et} \quad \lambda = \mu,$$

d'où l'équation de condition

$$\alpha - \beta = R e^{i\lambda} - R e^{-i\lambda}.$$

Considérons un point de l'axe OX situé à une distance de l'origine égale à z , en sorte que les coordonnées de ce point soient

$$x = y = z;$$

les coefficients angulaires des tangentes issues de ce point sont donnés par l'équation (1), dans laquelle on a remplacé x et y par z . Si l'on divise cette équation par $\lambda - \mu$ (ce qui revient à faire abstraction de la tangente OX), on trouve aisément que, en posant

$$u = R e^{-i\lambda} - \beta = R e^{i\lambda} - \alpha,$$

les coefficients angulaires des deux autres tangentes sont déterminés par l'équation

$$R e^{-i\lambda} \lambda^2 + (u + z) \lambda \mu + R e^{i\lambda} \mu^2 = 0.$$

En laissant de côté le point où la courbe est tangente à OX, on obtiendra les deux autres points où elle rencontre cette droite en exprimant que l'équation précédente a deux racines égales, ce qui donne la relation

$$(u + z)^2 = 4 R^2.$$

Si maintenant on remarque que, les deux points d'intersection dont je viens de parler étant à égale distance de l'origine O, les deux valeurs obtenues pour z doivent être égales et de signes contraires, on en conclut

$$u = R e^{-i\lambda} - \beta = R e^{i\lambda} - \alpha = 0,$$

d'où

$$\alpha = R e^{i\lambda} \quad \text{et} \quad \beta = R e^{-i\lambda}.$$

Ainsi le centre ω du cercle K, lieu des sommets des angles droits

circonscrits à l'hypocycloïde, est situé sur la droite qui fait avec l'axe OX un angle égal à φ et à une distance égale à R, c'est-à-dire au rayon de ce cercle. En désignant par A et A' les deux points de rencontre de OX avec la courbe, on voit ainsi que ce cercle passe par le milieu O du segment AA' et que ce segment a une longueur constante égale à 4R, propositions bien connues.

5. En remplaçant dans l'équation (1) α et β par leurs valeurs, l'équation mixte de l'hypocycloïde prend la forme suivante :

$$(2) \quad R(\lambda - \mu)(e^{-i\varphi}\lambda^2 + e^{i\varphi}\mu^2) + \lambda\mu(\lambda\gamma - \mu x) = 0,$$

et l'équation qui donne les coefficients angulaires des tangentes issues d'un point de l'axe OX ($x = y = z$) devient

$$(3) \quad R e^{-i\varphi}\lambda^2 + z\lambda\mu + R e^{i\varphi}\mu^2 = 0.$$

En particulier, les tangentes issues du point A', pour lequel on a $z = -2R$, sont déterminées par l'équation

$$\left(e^{-\frac{i\varphi}{2}}\lambda - e^{\frac{i\varphi}{2}}\mu\right)^2 = 0,$$

d'où l'on voit que la tangente menée au point A' fait avec l'axe OX un angle égal à $\frac{\varphi}{2}$.

Si donc on prend sur le cercle K le point O' diamétralement opposé au point O, cette tangente est précisément la droite A'O'; la droite O'A est également tangente à l'hypocycloïde au point A, et ces deux droites, conformément à une proposition bien connue, sont rectangulaires entre elles.

6. On voit que l'on peut, par les points A et A', mener une infinité d'hypocycloïdes tangentes à l'axe OX; toutes ces courbes sont d'ailleurs égales entre elles, puisque la longueur du segment AA' détermine le rayon du cercle K et par suite la grandeur de la courbe elle-même. On les obtiendra toutes en donnant à φ toutes les valeurs possibles dans l'équation (2).

Soient deux de ces courbes H_φ et $H_{\varphi+\theta}$ caractérisées par deux valeurs de l'angle φ différant entre elles de l'angle θ ; si l'on désigne par ω et ω_1 les centres des cercles des points desquels on voit res-

pectivement ces courbes sous un angle droit, on voit que l'angle $\omega O \omega$, est précisément égal à θ .

D'un point M situé sur l'axe OX et à une distance du point O égale à z , menons aux deux courbes K_τ et $K_{\tau+\theta}$ les tangentes distinctes de l'axe.

Les coefficients angulaires de ces tangentes sont respectivement déterminés par les deux équations

$$R e^{-i\tau} \lambda^2 + z \lambda \mu + R e^{i\tau} \mu^2 = 0$$

et

$$R e^{-i(\tau+\theta)} \lambda^2 + z \lambda \mu + R e^{i(\tau+\theta)} \mu^2 = 0;$$

ceux des tangentes menées à $H_{\tau+\theta}$ se déduisent évidemment de ceux des tangentes menées à H_τ , en les multipliant par le facteur constant $e^{-i\theta}$; en d'autres termes, les tangentes à $H_{\tau+\theta}$ s'obtiennent en faisant tourner de l'angle $\frac{\theta}{2}$ les tangentes à H_τ .

D'où la proposition suivante :

Si l'on considère une droite quelconque D tangente à une hypocycloïde à trois points de rebroussement, et si l'on imagine un angle de grandeur constante dont le sommet décrit cette droite tandis qu'un de ses côtés demeure tangent à la courbe, le second côté de cet angle enveloppe une autre hypocycloïde égale à la première, tangente à la droite D et passant par les deux points où cette droite coupe la première hypocycloïde.

Ce que l'on peut encore énoncer ainsi :

Soit une hypocycloïde à trois points de rebroussement qui se déplace sans changer de forme, en restant tangente à une droite fixe D et en passant par un point fixe de cette droite (auquel cas elle passe nécessairement par un autre point fixe situé sur la même droite); par différents points de D menons des tangentes à la courbe, et imaginons que, pendant le déplacement de cette courbe, ces droites lui demeurent tangentes; pour deux positions quelconques de l'hypocycloïde mobile, les angles décrits par les tangentes autour des points fixes de D sont tous égaux entre eux.

7. J'ajouterai que dans le mouvement les points de contact décrivent des cercles, ce que, du reste, des considérations géomé-

triques très-simples rendent évident. Considérons, en effet, un point M situé sur l'axe OX, à une distance de l'origine égale à z . En désignant simplement par μ le coefficient angulaire d'une des tangentes menées de ce point à la courbe (ce qui revient à faire $\lambda = 1$), l'équation de cette tangente est

$$(4) \quad \frac{y - z}{x - z} = \mu,$$

et l'on a la relation

$$(5) \quad R e^{i\varphi} \mu^2 + z \mu + R e^{-i\varphi} = 0.$$

Les coordonnées du point de contact s'obtiendront en résolvant par rapport à x et y l'équation (4) et l'équation suivante, que l'on en déduit en la dérivant par rapport à z :

$$\frac{y - x}{(x - z)^2} = \frac{d\mu}{dz}.$$

De l'équation (5) on déduit d'ailleurs

$$(2 R e^{i\varphi} \mu + z) \frac{d\mu}{dz} + \mu = 0,$$

d'où

$$\frac{d\mu}{dz} = - \frac{\mu}{\sqrt{z^2 - 4R^2}}$$

et

$$(6) \quad \frac{y - x}{(x - z)^2} + \frac{\mu}{\sqrt{z^2 - 4R^2}} = 0.$$

Pour obtenir le lieu des points de contact, il faut éliminer φ et μ entre les équations (4), (5) et (6), ou simplement μ entre les équations (4) et (6), qui ne renferment pas φ .

On obtient ainsi l'équation

$$(x - z)(y - z) + (y - x)\sqrt{z^2 - 4R^2} = 0,$$

que l'on peut mettre sous la forme suivante :

$$(y - z - \sqrt{z^2 - 4R^2})(x - z + \sqrt{z^2 - 4R^2}) = 4R^2 - z^2.$$

Elle représente deux cercles tangents au point M à l'axe OX ; leurs

centres sont situés à l'intersection de la perpendiculaire élevée à l'axe en ce point avec le cercle décrit sur AA' comme diamètre.

8. Si l'on considère, comme précédemment, les deux hypocycloïdes H_τ et $H_{\tau+1}$, on voit que le sommet d'un angle circonscrit à ces deux courbes et ayant pour valeur $\frac{\theta}{2}$ décrit un lieu dont fait partie la tangente commune OX; on peut rechercher si cette droite constitue à elle seule le lieu complet.

Je remarque, à cet effet, que les coefficients angulaires des tangentes menées du point (x, y) à la courbe H_τ sont déterminés par l'équation

$$(2) \quad R(\lambda - \mu)(e^{-i\tau}\lambda^2 + e^{i\tau}\mu^2) + \lambda\mu(\lambda y - \mu x) = 0,$$

et ceux des tangentes menées du même point à la courbe $H_{\tau+1}$ par l'équation

$$R(\lambda' - \mu')(e^{-i(\tau+1)}\lambda'^2 + e^{i(\tau+1)}\mu'^2) + \lambda'\mu'(\lambda'y - \mu'x) = 0.$$

Si les deux tangentes font l'angle donné $\frac{\theta}{2}$, on a

$$\frac{\lambda'}{\mu'} = \frac{\lambda e^{\frac{\theta i}{2}}}{\mu e^{-\frac{\theta i}{2}}},$$

et l'équation précédente devient

$$(7) \quad R\left(e^{\frac{\theta i}{2}}\lambda - e^{-\frac{\theta i}{2}}\mu\right)(e^{-i\tau}\lambda^2 + e^{i\tau}\mu^2) + \lambda\mu\left(e^{\frac{\theta i}{2}}y\lambda - e^{-\frac{\theta i}{2}}x\mu\right) = 0.$$

Reste à éliminer λ et μ entre les relations (2) et (7); en éliminant entre elles l'expression $e^{-i\tau}\lambda^2 + e^{i\tau}\mu^2$, il vient

$$\frac{e^{\frac{\theta i}{2}}\lambda - e^{-\frac{\theta i}{2}}\mu}{\lambda - \mu} = \frac{e^{\frac{\theta i}{2}}y\lambda - e^{-\frac{\theta i}{2}}x\mu}{\lambda y - \mu x},$$

et, en effectuant les calculs,

$$(y - x)\left(e^{\frac{\theta i}{2}} - e^{-\frac{\theta i}{2}}\right) = 0.$$

La tangente OX constitue donc bien à elle seule le lieu du sommet de l'angle constant circonscrit aux deux courbes.

9. Les hypocycloïdes H_φ et $H_{\varphi+\theta}$, qui touchent toutes les deux l'axe OX, ont, en outre, deux autres tangentes communes; pour avoir leur équation, il suffit d'éliminer λ et μ entre l'équation (2) et l'équation

$$(8) \quad R(\lambda - \mu)(e^{-i(\varphi+\theta)}\lambda^2 + e^{i(\varphi+\theta)}\mu^2) + \lambda\mu(\lambda y - \mu x) = 0.$$

Éliminant d'abord $\lambda y - \mu x$ entre ces égalités, il vient

$$\lambda^2 e^{-i\varphi}(1 - e^{-i\theta}) + \mu^2 e^{i\varphi}(1 - e^{i\theta}) = 0,$$

d'où, par une transformation facile,

$$\frac{\lambda}{\mu} = \pm e^{\varphi + \frac{\theta}{2}}.$$

Les angles que font ces deux tangentes avec l'axe OX sont donc égaux à $\frac{\varphi}{2} + \frac{\theta}{4}$ et à $\frac{\varphi}{2} + \frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{4}$; ces deux droites sont à angle droit. De là une construction qui permet de les obtenir aisément. Soient, en effet, K et K₁ les cercles des points desquels on voit respectivement sous un angle droit les courbes H_φ et $H_{\varphi+\theta}$; ces cercles, indépendamment du point O, se coupent encore en un second point M. Ce point est nécessairement le point de rencontre des tangentes cherchées, puisqu'elles sont rectangulaires entre elles. Si maintenant nous prolongeons le rayon OM jusqu'en son point de rencontre N avec le cercle décrit sur AA' comme diamètre, il résulte des considérations précédentes que les deux tangentes communes qui se croisent au point M sont parallèles aux droites NA et NA'.

D'où encore la proposition suivante :

Soit une hypocycloïde à trois points de rebroussement qui passe par deux points donnés A et A' et est tangente à la corde AA'; sur cette corde comme diamètre décrivons un cercle B et considérons le cercle K, lieu des points d'où l'on voit l'hypocycloïde sous un angle droit. Ce cercle passe, comme on le sait, par le point O, milieu de la corde AA', et, en outre, est tangent au cercle C.

Étant pris un point quelconque M sur le cercle K, si l'on prolonge le rayon OM jusqu'en son point de rencontre N avec le

cercle C, les droites menées par le point M parallèlement aux droites NA et NA' sont les deux tangentes rectangulaires entre elles que de ce point on peut mener à la courbe.

10. Les diverses hypocycloïdes qui, passant par les deux points A et A', sont tangentes à la corde AA', étant identiques entre elles, on peut les obtenir toutes par le déplacement d'une de ces courbes dans le plan.

Pour avoir une idée nette de ce déplacement, il faut chercher le lieu des centres instantanés de rotation dans le plan et le lieu décrit par ces centres relativement à la courbe mobile.

La courbe roulant sur les deux points A et A', les normales menées en ces points sont respectivement perpendiculaires aux droites AO' et A'O', et par conséquent se coupent sur le cercle C décrit sur AA' comme diamètre au point diamétralement opposé à O'; le lieu des centres instantanés de rotation dans le plan est donc le cercle C, dont le rayon est égal à 2R. On sait d'ailleurs que les normales aux extrémités de la corde AA' se coupent sur le cercle passant par les trois points de rebroussement de l'hypocycloïde, cercle dont le rayon est égal à 3R.

D'où la conclusion qui suit :

Étant pris sur un cercle C de rayon égal à 2R deux points diamétralement opposés A et A', si l'on fait rouler ce cercle dans l'intérieur d'un cercle C' de rayon égal à 3R, on sait que les deux points A et A' décrivent une même hypocycloïde à trois points de rebroussement inscrite dans le cercle C'. A un instant quelconque du mouvement, les points A et A' sont situés sur l'hypocycloïde, tandis que la droite AA' lui est tangente; si à cet instant on fixe le cercle C, et si l'on fait rouler sur ce cercle le cercle C' en entraînant avec lui la courbe, cette courbe, dans son déplacement, passe constamment par les points fixes A et A' et demeure tangente à la droite AA'.

II.

11. Les résultats qui précèdent peuvent se déduire aisément de quelques propositions très-simples et purement géométriques.

Considérons, à cet effet, une ellipse E située dans l'espace et dont la projection orthogonale sur un plan donné P soit un cercle C ; prenons arbitrairement sur cette courbe un point fixe A et un point mobile M . Si par le milieu I de la corde AM nous menons un plan perpendiculaire à cette corde, il coupe le plan P suivant une droite dont l'enveloppe est une courbe H que l'on peut aussi évidemment définir comme le lieu des centres des sphères symétriques par rapport au plan P et tangentes à l'ellipse E .

Je dis d'abord que la courbe H est une hypocycloïde à trois points de rebroussement.

Soit D une droite située dans le plan P ; si d'un point quelconque N de cette droite comme centre on décrit une sphère passant par le point A , cette sphère coupe le plan Q de l'ellipse suivant un cercle passant par le point A et par le point A' qui lui est symétrique par rapport à la projection orthogonale de D sur le plan Q .

Il est clair que le point N est sur la courbe H si ce cercle est tangent à l'ellipse, et, comme par les points A et A' on peut mener quatre cercles tangents à E , il en résulte que la courbe K est du quatrième ordre.

Soit N un point quelconque du plan P ; de ce point comme centre décrivons une sphère passant par le point A ; cette sphère coupe le plan Q suivant un cercle rencontrant l'ellipse au point A et en trois autres points B , C et D . Les plans menés respectivement par les milieux des cordes AB , AC et AD coupent le plan P suivant des droites tangentes à H et se croisant au point donné N .

La courbe H est donc de la troisième classe.

Si le point N est rejeté à l'infini dans une direction quelconque, la sphère dont je viens de parler se réduit au plan mené par A perpendiculairement à cette direction, et, comme ce plan ne coupe E qu'en un point, il est clair qu'on ne peut mener à la courbe H qu'une tangente parallèle à une direction donnée. Cette courbe est donc doublement tangente à la droite de l'infini, et les points de contact sont situés sur les perpendiculaires menées aux asymptotes de la projection de l'ellipse sur le plan P . Cette projection étant un cercle, ces asymptotes, ainsi que leurs perpendiculaires, sont des droites isotropes. La courbe H est donc de troisième classe et doublement tangente, aux ombilics, à la droite de l'in-

fini; par suite, c'est une hypocycloïde à trois points de rebroussement.

12. Cette hypocycloïde a, comme on le sait, trois points de rebroussement α, β, γ qui sont les sommets d'un triangle équilatéral, et le centre du cercle circonscrit à ce triangle est le point de concours des tangentes de rebroussement.

Considérons l'un quelconque α de ces points de rebroussement; les tangentes que l'on peut de ce point mener à la courbe étant toutes les trois confondues en une seule droite, la sphère passant par A et décrite du point α comme centre coupe le plan Q suivant un cercle passant par A et osculateur de l'ellipse E en un point α' ; la projection sur le plan Q de la tangente de rebroussement au point α est d'ailleurs la droite menée par le milieu de la corde A α et perpendiculairement à cette corde.

Si maintenant on remarque que les trois tangentes de rebroussement sont concourantes, on obtiendra la proposition suivante, due à Steiner :

Étant donné sur une ellipse un point quelconque A, on peut déterminer trois cercles osculateurs de cette courbe qui passent par le point A; les trois points de contact et le point A sont sur un même cercle.

D'après ce que je viens d'exposer, on peut ajouter que :

Si l'ellipse se projette orthogonalement sur un plan donné P suivant une circonférence de cercle, les droites menées perpendiculairement au plan de l'ellipse par les trois points de contact rencontrent le plan P en trois points qui sont les sommets d'un triangle équilatéral, et la droite menée par le centre du cercle circonscrit aux trois points de contact et perpendiculairement à son plan rencontre le plan P au centre du cercle circonscrit à ce triangle équilatéral.

13. Prenons sur l'ellipse E un autre point fixe B; à ce point correspond une seconde hypocycloïde H'. Cherchons les tangentes communes aux courbes H et H'.

Je désigne par F et G les deux axes de l'ellipse, par f et g les

droites suivant lesquelles le plan P est coupé par les plans menés respectivement par F et G et normalement au plan Q . Les droites f et g sont évidemment perpendiculaires entre elles, puisque F est parallèle au plan P .

Cela posé, si des points A et B on mène dans le plan Q des perpendiculaires à F , cet axe les divise en deux parties égales; il en résulte que f est une tangente commune à H et H' , et les mêmes considérations s'appliquent à la droite g . Les deux courbes ont donc déjà en commun deux tangentes rectangulaires entre elles.

Considérons maintenant la corde AB et le plan mené par son point milieu perpendiculairement à sa direction; il coupe le plan P suivant une droite D qui est aussi tangente aux deux hypocycloïdes.

14. Les points de contact de cette droite s'obtiendront évidemment en prenant son intersection avec les plans menés en A et en B normalement à l'ellipse.

Pour obtenir les autres points où elle rencontre les deux courbes, je mène par les points A et B un cercle tangent à l'ellipse; on peut mener deux de ces cercles, et leurs points de contact m et m' sont diamétralement opposés. Si l'on construit les axes ⁽¹⁾ de ces deux cercles, il est clair qu'ils rencontrent D en deux points appartenant à la fois à H et H' . Soient n et n' ces deux points; on voit que les hypocycloïdes ont une corde commune à laquelle elles sont toutes les deux tangentes : *elles sont donc égales entre elles*.

On peut remarquer que les droites menées aux points n et n' tangentielllement à la courbe H sont les traces de deux plans perpendiculaires aux cordes Am et Am' ; elles sont donc perpendiculaires à leurs projections sur le plan P , et, comme la projection du diamètre mm' passe par le centre du cercle C , on voit que ces projections sont rectangulaires; il en est donc de même des deux tangentes aux points n et n' , proposition bien connue.

15. Lorsque le point A se déplace sur l'ellipse, l'hypocycloïde qui lui correspond demeure, comme je viens de le montrer, inva-

⁽¹⁾ J'appelle, pour abrégier, *axe d'un cercle* la droite passant par le centre de ce cercle et perpendiculaire à son plan.

riable de forme en restant tangente aux deux droites fixes f et g . Je dis que la droite qui joint les deux points de contact est la trace sur le plan P du plan normal à l'ellipse au point A .

Menons, en effet, par le point A les cordes Aa et Ab , respectivement perpendiculaires aux axes F et G . Le point où la droite f touche l'hypocycloïde H est le point de rencontre du plan P avec l'axe du cercle bitangent à l'ellipse aux points A et a . Si donc au point A on mène le plan normal à cette courbe, il contient ce point de contact; par une raison semblable, il contient l'autre point de contact. La proposition que je voulais démontrer est donc établie.

16. Si le point A se déplace infiniment peu sur l'ellipse, l'hypocycloïde H roule sur les deux droites f et g ; la droite qui joint les deux points de contact est une corde commune aux deux courbes et, de plus, leur est tangente; par suite, elle a une longueur constante.

Donc :

Les traces, sur le plan P , des plans normaux à l'ellipse E enveloppent une hypocycloïde à quatre points de rebroussement. Le lieu des centres des sphères doublement tangentes à l'ellipse se compose des deux tangentes doubles de rebroussement de cette hypocycloïde.

17. Au lieu de considérer une ellipse, j'aurais pu considérer une biquadratique quelconque, ayant pour plan de symétrie le plan P et située sur un cylindre dont la base est un cercle situé dans ce plan.

Sans rien changer aux démonstrations qui précèdent, on obtiendrait facilement les propositions qui suivent :

Étant donnée une biquadratique résultant de l'intersection d'un cylindre droit, ayant pour base un cercle situé dans un plan P , avec une surface quelconque du second ordre ayant ce plan pour plan de symétrie, le lieu des centres des sphères qui, passant par les extrémités d'une corde de la courbe perpendiculaire au plan P , sont doublement tangentes à cette courbe, est une hypocycloïde H à trois points de rebroussement située dans le plan de symétrie.

Si l'on considère les diverses cordes de la courbe perpendiculaires au plan P, les diverses hypocycloïdes qui leur correspondent sont identiques et ne diffèrent que par leur position dans le plan.

Les traces sur le plan de symétrie des plans normaux à la biquadratique enveloppent une hypocycloïde à quatre points de rebroussement.

Les centres des sphères quadruplement tangentes à la biquadratique décrivent les deux droites rectangulaires qui constituent les tangentes doubles de rebroussement de cette dernière hypocycloïde.

18. La considération des trois points de rebroussement de l'hypocycloïde H conduit, relativement aux biquadratiques douées d'un plan de symétrie, à un théorème analogue à celui qui a été donné par Steiner relativement aux coniques, et que j'ai rappelé plus haut.

Comme il est facile de le voir, il n'est pas besoin de supposer que la projection de la biquadratique sur le plan de symétrie soit un cercle, et l'on peut énoncer la proposition suivante :

Étant donnée une biquadratique quelconque ayant pour plan de symétrie un plan donné P, par les extrémités d'une corde quelconque de cette courbe perpendiculaire au plan P, on peut mener trois sphères qui ont avec la courbe un double contact du second ordre; les six points de contact et les extrémités de la corde sont sur une même sphère dont le centre est dans le plan de symétrie.

Si la biquadratique se projette suivant un cercle sur le plan de symétrie, on peut ajouter que :

Les centres des trois sphères qui ont un double contact sont les sommets d'un triangle équilatéral, et le centre de la sphère qui contient les points de contact est le centre du cercle circonscrit à ce triangle.

19. Je reviens maintenant au cas précédemment étudié de l'ellipse E, quoique les considérations suivantes s'appliquent encore sans modification au cas plus général où l'on considère une biquadratique.

J'ai montré que, quand le point A se déplaçait sur l'ellipse, l'hypocycloïde H se déplaçait, sans changer de forme, dans le plan P.

Pour étudier la loi de ce déplacement, je remarque que, en désignant respectivement par φ et γ les points où H touche les droites f et g , la droite $\varphi\gamma$ a une longueur constante, que j'appellerai $4R$. Les normales à la courbe menées aux points φ et γ se rencontrent en un point dont la distance au point d'intersection de f et de g est constante et égale à $4R$. Le centre instantané de rotation décrit donc dans le plan un cercle de rayon égal à $4R$. On sait d'ailleurs que, relativement à la courbe, il décrit le cercle qui lui est circonscrit et dont le rayon est égal à $3R$.

On peut, par suite, se représenter ainsi qu'il suit le déplacement de l'hypocycloïde dans son plan :

Imaginons un cercle K de rayon égal à $4R$, puis deux autres cercles K' et K" de rayons respectivement égaux à $3R$ et à $2R$ et qui touchent tous les deux K au même point M. Si l'on considère le diamètre Δ du cercle K" qui passe par le point M, et si l'on fait rouler ce cercle dans le cercle K', supposé fixe, en entraînant avec lui ce diamètre, on sait que cette droite enveloppe une hypocycloïde H à trois points de rebroussement inscrite dans le cercle R'.

Si maintenant on suppose que, cette courbe restant invariablement liée au cercle K', on fasse rouler ce cercle dans le cercle R, l'hypocycloïde prendra successivement les diverses positions qui correspondent aux diverses positions du point A sur l'ellipse.

Si, de plus, on imagine que le cercle K" roule, en même temps que le cercle K', dans l'intérieur du cercle K, et de façon qu'ils le touchent tous les deux toujours au même point, la droite Δ , dans ce mouvement, enveloppera l'hypocycloïde à quatre points de rebroussement qui est l'enveloppe des traces des plans normaux à l'ellipse, tandis que ses extrémités décriront les axes de cette hypocycloïde.

20. Considérons les deux hypocycloïdes H et H' qui correspondent à deux points donnés A et B de l'ellipse E.

Soit R un point quelconque de cette ellipse ; les plans menés respectivement par les milieux des deux cordes AB et BR et normalement à ces cordes coupent le plan P suivant deux droites β et γ respectivement tangentes aux courbes H et H' .

Si, comme précédemment, nous appelons D la droite suivant laquelle le plan P est coupé par le plan mené par le milieu de AB et perpendiculairement à cette corde, nous savons que D est à la fois une tangente commune et une corde commune à H et à H' . D'ailleurs, les perpendiculaires élevées aux points milieux des côtés d'un triangle se coupant en un même point, il en résulte que les tangentes β et γ se rencontrent en un point de D . Elles sont, du reste, perpendiculaires aux projections sur le plan P des cordes AR et BR , et, comme ces cordes font un angle constant (leur point de rencontre décrit, en effet, le cercle C , tandis qu'elles tournent autour de points fixes de ce cercle), il en est de même de ces tangentes.

D'où le théorème suivant, que j'ai déjà démontré plus haut :

Si l'on considère une droite quelconque tangente à une hypocycloïde à trois points de rebroussement, et si l'on imagine un angle de grandeur constante dont le sommet décrit cette droite, tandis qu'un de ses côtés demeure tangent à la courbe, le second côté de cet angle enveloppe une hypocycloïde égale à la première.

21. Les considérations géométriques très-simples dont je me suis servi trouvent d'ailleurs, dans d'autres questions, des applications intéressantes. Je me bornerai ici à énoncer la proposition suivante :

Supposons que le sommet d'un angle de grandeur constante décrive une droite D , tandis que ses côtés enveloppent deux courbes K et K' ; pour une position donnée de l'angle, soient respectivement a et a' les points de contact des deux côtés.

Cela posé, si l'on construit l'hypocycloïde à trois points de rebroussement qui oscule la courbe K au point a et touche la droite D , puis l'hypocycloïde qui oscule la courbe K' au point a' et touche également la droite D , ces deux hypocycloïdes sont égales et rencontrent D aux deux mêmes points.

Sur un système de trois équations différentielles totales qui définissent la moyenne arithmético-géométrique de quatre éléments; par M. C.-W. BORCHARDT.

(Séance du 25 avril 1879.)

La moyenne arithmético-géométrique de deux éléments a, b est une fonction de ces éléments qui satisfait, comme on sait, à l'équation

$$f\left[\frac{1}{2}(a+b), \sqrt{ab}\right] = f(a, b).$$

En partant de cette équation, j'ai montré, dans un travail inséré au tome 58 de mon *Journal*, que la moyenne arithmético-géométrique de deux éléments peut être définie par une équation différentielle ordinaire du premier ordre et du second degré par rapport à la variable dépendante, résultat que M. Bertrand a trouvé digne de faire entrer dans son grand Ouvrage sur le Calcul infini-tésimal.

Dans mes études sur la moyenne arithmético-géométrique de quatre éléments, j'ai tâché de trouver une définition analogue de cette nouvelle transcendante. Le résultat que j'ai trouvé ne présente pas encore toute la simplicité que j'aurais désirée, et, dans la Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Berlin* (séance du 2 novembre 1876), je me suis même contenté d'en indiquer seulement la forme générale, sans donner les formules dans leur détail.

Mais comme, dans un sujet nouveau, un résultat sûr, ne fût-ce même pas dans sa forme définitive, peut être utile pour des recherches ultérieures, j'espère qu'il ne sera pas sans intérêt pour la Société de connaître le système d'équations différentielles tel que je l'ai trouvé.

Soient a, b, c, e quatre éléments positifs rangés dans leur ordre décroissant et qui satisfont à l'inégalité

$$ae - bc > 0;$$

Soient

$$\begin{aligned}a &= a + b + c + e, \\b &= a + b - c - e, \\c &= a - b + c - e, \\e &= a - b - c + e, \\2b' &= \sqrt{ab} + \sqrt{ce}, \quad 2b'' = \sqrt{ab} - \sqrt{ce}, \\2c' &= \sqrt{ac} + \sqrt{be}, \quad 2c'' = \sqrt{ac} - \sqrt{be}, \\2e' &= \sqrt{ae} + \sqrt{bc}, \quad 2e'' = \sqrt{ae} - \sqrt{bc},\end{aligned}$$

toutes les racines étant prises avec le signe positif, et soit g la limite commune à laquelle on est conduit en appliquant un nombre indéfini de fois l'algorithme

$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{1}{4}(a + b + c + e), \\b_1 &= \frac{1}{2}(\sqrt{ab} + \sqrt{ce}), \\c_1 &= \frac{1}{2}(\sqrt{ac} + \sqrt{be}), \\e_1 &= \frac{1}{2}(\sqrt{ae} + \sqrt{bc}).\end{aligned}$$

Cela posé, il s'agit de définir la limite g par des équations différentielles.

Je choisirai comme variables indépendantes les trois quantités

$$p = \frac{eb''}{cb'}, \quad q = \frac{bc''}{ec'}, \quad r = \frac{ce''}{be'}.$$

En posant :

$$p' = 1 - q + qr, \quad q' = 1 - r + rp, \quad r' = 1 - p + pq,$$

je déduirai de p, q, r les expressions rationnelles

$$\begin{aligned}p_0 &= \frac{1 - q \cdot 1 - r}{p'}, & q_0 &= \frac{1 - r \cdot 1 - p}{q'}, & r_0 &= \frac{1 - p \cdot 1 - q}{r'}, \\p_1 &= \frac{pp'}{p_0 q' r'}, & q_1 &= \frac{qq'}{q_0 r' p'}, & r_1 &= \frac{rr'}{r_0 p' q'}.\end{aligned}$$

Comme variables dépendantes, j'introduirai trois quantités s, t, u qui dérivent de la transcendante g au moyen de différentia-

tions partielles, et que l'on définit de la manière la plus simple par une seule équation différentielle totale :

$$2d \log \frac{g}{a} = sp_0 \frac{dp}{p} + tq_0 \frac{dq}{q} + ur_0 \frac{dr}{r}.$$

Cela posé, les différentielles ds , dt , du s'expriment en fonctions linéaires de dp , dq , dr et du second ordre en s , t , u .

Pour plus de simplicité, je poserai

$$\begin{aligned} p_0 \frac{dp}{p} &= \delta p, & q_0 \frac{dq}{q} &= \delta q, & r_0 \frac{dr}{r} &= \delta r, \\ p_0 p_1 \frac{dp}{p} &= \delta_1 p, & q_0 q_1 \frac{dq}{q} &= \delta_1 q, & r_0 r_1 \frac{dr}{r} &= \delta_1 r, \\ d \log (p_0 q_0 r_0) &= \Delta, \end{aligned}$$

$$s - t - u = 2s_1, \quad -s + t - u = 2t_1, \quad -s - t + u = 2u_1.$$

Alors les équations différentielles qui définissent s , t , u peuvent être écrites sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} 0 &= 2ds + \Delta \cdot s + (q_1 + r_1) \delta_1 p + (p_1 + s) \delta_1 q + (p_1 - s) \delta_1 r - S, \\ 0 &= 2dt + \Delta \cdot t + (q_1 - t) \delta_1 p + (p_1 + r_1) \delta_1 q + (q_1 + t) \delta_1 r - T, \\ 0 &= 2du + \Delta \cdot u + (r_1 + u) \delta_1 p + (r_1 - u) \delta_1 q + (p_1 + q_1) \delta_1 r - U, \end{aligned}$$

S , T , U désignant les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} S &= s^2 \delta p + u_1^2 \delta q + t_1^2 \delta r, \\ T &= u_1^2 \delta p + t^2 \delta q + s_1^2 \delta r, \\ U &= t_1^2 \delta p + s_1^2 \delta q + u^2 \delta r. \end{aligned}$$

En choisissant s_1 , t_1 , u_1 comme variables dépendantes, les équations différentielles prennent la forme

$$\begin{aligned} 0 &= 2ds_1 + \Delta \cdot s_1 - (s_1 + t_1 + r_1) \delta q_1 + (s_1 - q_1 + u_1) \delta r_1 + S_1, \\ 0 &= 2dt_1 + \Delta \cdot t_1 - (p_1 + t_1 + u_1) \delta r_1 + (s_1 + t_1 - r_1) \delta p_1 + T_1, \\ 0 &= 2du_1 + \Delta \cdot u_1 - (s_1 + q_1 + u_1) \delta p_1 + (-p_1 + t_1 + u_1) \delta q_1 + U_1, \end{aligned}$$

S_1 , T_1 , U_1 désignant les expressions

$$\begin{aligned} S_1 &= -t_1 u_1 \delta p + s_1 (s_1 + u_1) \delta q + s_1 (s_1 + t_1) \delta r, \\ T_1 &= t_1 (t_1 + u_1) \delta p - s_1 u_1 \delta q + t_1 (s_1 + t_1) \delta r, \\ U_1 &= u_1 (t_1 + u_1) \delta p + u_1 (s_1 + u_1) \delta q - s_1 t_1 \delta r. \end{aligned}$$

Ce système de trois équations différentielles totales présente dans sa forme une analogie remarquable avec l'équation différentielle unique qui définit la moyenne arithmético-géométrique de deux éléments. Les variables indépendantes p, q, r ne sont pas les seules pour lesquelles on trouve un système d'équations différentielles semblable à celui que l'on vient de proposer, et c'est, comme je l'espère, un autre choix de variables indépendantes qui conduira à un système plus simple d'équations différentielles.

Le système proposé d'équations différentielles totales, étant intégré, donne des expressions qui contiennent des constantes arbitraires. Concevons que l'on ait donné à ces constantes les valeurs particulières qu'elles prennent dans le cas où g est la moyenne arithmético-géométrique des éléments a, b, c, e .

Dans ce cas, les équations différentielles proposées s'intègrent par des séries ordonnées suivant les puissances et produits de puissances ascendantes de $1-p, 1-q, 1-r$, et qui convergent, lorsque chacune de ces différences est plus petite que l'unité, ce que l'on démontre aisément en introduisant dans l'intégrale double (1) par laquelle j'ai défini la moyenne arithmético-géométrique de a, b, c, e les quantités p, q, r .

En négligeant, dans ce développement, les termes du second ordre et des ordres supérieurs, on obtient

$$\frac{a}{g} = 1,$$

c'est-à-dire que, dans ce développement, il n'y a point de termes du premier ordre, ce qui suffit pour déterminer les valeurs que prennent dans le cas dont il s'agit les constantes de l'intégration.

De ce qui précède il résulte que l'on peut développer suivant les puissances et produits de puissances de $1-p, 1-q, 1-r$ la transcendante $\frac{a}{g}$, en se servant, pour le calcul des coefficients, des équations différentielles données plus haut.

Je terminerai cette Note en indiquant, à cause de sa simplicité,

(1) Voir *Mémoires de l'Académie de Berlin*, année 1878, p. 96 (Classe mathématique).

le résultat auquel on parvient pour les termes du second ordre, qui sont

$$\frac{1}{4}(1-q)(1-r) + \frac{1}{4}(1-p)(1-r) + \frac{1}{4}(1-p)(1-q).$$

Sur l'indice des fractions rationnelles; par M. HERMITE.

(Séance du 25 avril 1879.)

Soient U et V deux polynômes de degré n et $n-1$, que je supposerai premiers entre eux; je me propose de montrer, par une considération directe et entièrement élémentaire, que l'indice de la fraction $\frac{V}{U}$, entre les limites $-\infty$ et $+\infty$ de la variable, donne la différence entre le nombre des racines imaginaires de l'équation $U + iV = 0$, où le coefficient de i est positif, et le nombre de ces racines où il est négatif. Soit, à cet effet,

$$U + iV = (x - a_1 - ib_1)(x - a_2 - ib_2) \dots (x - a_n - ib_n),$$

et posons

$$U_1 + iV_1 = (x - a_2 - ib_2) \dots (x - a_n - ib_n),$$

de sorte qu'on ait

$$U + iV = (x - a_1 - ib_1)(U_1 + iV_1),$$

et, par conséquent,

$$U = (x - a_1)U_1 + b_1V_1,$$

$$V = -b_1U_1 + (x - a_1)V_1.$$

Je remarque d'abord qu'il résulte de ces relations que les polynômes U et U_1 sont premiers entre eux; car autrement U et V auraient un diviseur commun, contre la supposition faite. Cela posé, l'égalité

$$(U + iV)(U_1 - iV_1) = (x - a_1 - ib_1)(U_1^2 + V_1^2)$$

donne, en égalant dans les deux membres les coefficients de i ,

$$VU_1 - UV_1 = -b_1(U_1^2 + V_1^2)$$

ou bien

$$\frac{V}{U} - \frac{V_1}{U_1} = - \frac{b_1(U_1^2 + V_1^2)}{UU_1}.$$

Faisons croître maintenant la variable de $-\infty$ à $+\infty$; puisque les polynômes U et U_1 ne peuvent s'évanouir pour la même valeur, on voit que l'indice du premier membre sera la différence des indices des fractions $\frac{U}{V}$ et $\frac{U_1}{V_1}$, qui va s'obtenir immédiatement.

Supprimons, en effet, le facteur positif $U_1^2 + V_1^2$; nous sommes amené à la quantité $\frac{-b_1}{UU_1}$, dont la réciproque a un indice nul, de sorte qu'il suffit d'appliquer la proposition contenue dans l'égalité

$$\prod_{x_0}^{x_1} f(x) + \prod_{x_0}^{x_1} \frac{1}{f(x)} = \varepsilon,$$

où $\varepsilon = +1$ lorsque $f(x_0) > 0$, $f(x_1) < 0$, $\varepsilon = -1$ si l'on a $f(x_0) < 0$, $f(x_1) > 0$, et enfin $\varepsilon = 0$ lorsque $f(x_0)$ et $f(x_1)$ sont de même signe. Dans le cas présent, $x_0 = -\infty$, $x_1 = +\infty$; d'ailleurs U et U_1 sont de degrés n et $n-1$: il en résulte que ε sera $+1$ ou -1 suivant que b_1 sera positif ou négatif.

La proposition énoncée à l'égard de l'équation $U + iV = 0$, de degré n , se trouve ainsi ramenée au cas de l'équation $U_1 + iV_1 = 0$, dont le degré est moindre d'une unité, et, de proche en proche, on arrivera au cas le plus simple, à savoir

$$x - a_n - ib_n = 0,$$

où elle se vérifie immédiatement.

Une première conséquence à en tirer, c'est que, en désignant par I l'indice de $\frac{V}{U}$, c'est-à-dire l'excès du nombre de fois que cette fraction, en devenant infinie, passe du positif au négatif sur le nombre de fois qu'elle passe du négatif au positif, le nombre des racines imaginaires de l'équation $U + iV = 0$ dans lesquelles le coefficient de i est positif est donné par la formule $\frac{I+n}{2}$.

Supposons ensuite que, en changeant x en $x + i\lambda$, $U + iV$ devienne $U_\lambda + iV_\lambda$, et soit I_λ l'indice de $\frac{V_\lambda}{U_\lambda}$. Le nombre des racines

de l'équation proposée dans lesquelles le coefficient de i est supérieur à λ sera $\frac{I_\lambda + n}{2}$; la formule $\frac{I_\lambda - I_{\lambda'}}{2}$ donnera donc, en supposant $\lambda < \lambda'$, le nombre des racines où le coefficient de i est compris entre les deux limites λ et λ' . La transformée déduite de l'équation $U + iV = 0$ par le changement de x en ix conduira d'ailleurs de la même manière au nombre des racines dont la partie réelle est dans un intervalle donné. Considérons encore l'équation en y obtenue en faisant

$$y = \frac{x - g}{h - x}$$

et la droite passant par les points dont les affixes sont g et h . L'indice relatif à cette nouvelle transformée donnera le nombre des racines de la proposée qui sont au-dessus ou au-dessous de cette droite, et, si nous remplaçons g et h par $g + k$ et $h + k$, de manière à définir une seconde droite parallèle à la première, la demi-différence des indices relatifs aux deux transformées représentera le nombre des racines comprises entre les deux parallèles.

En dernier lieu, je remarquerai que, si l'on suppose les quantités $b_1, b_2, \dots, b_n$ toutes de même signe, on a

$$I = +n \quad \text{ou} \quad I = -n,$$

selon qu'elles seront positives ou négatives. Dans les deux cas, la fraction $\frac{V}{U}$ doit, par conséquent, passer n fois par l'infini lorsque la variable croît de $-\infty$ à $+\infty$; ainsi l'équation $U = 0$ a nécessairement toutes ses racines réelles. C'est donc un nouvel exemple qui s'ajoute, en Algèbre, à l'équation dont dépendent les inégalités séculaires du mouvement elliptique des planètes et qui a été l'objet du travail célèbre de notre confrère M. Borchardt. Je ne tenterai point de suivre la voie qu'a ouverte l'illustre géomètre en appliquant le théorème de Sturm à l'équation $U = 0$ pour obtenir, sous forme de sommes de carrés, les fonctions littérales dont dépendent les conditions de réalité des racines; mais je saisis l'occasion d'employer, pour démontrer directement la propriété que j'ai en vue, une méthode que Sturm a lui-même donnée dans une Note du

Journal de M. Liouville, publiée à la suite d'un travail de M. Gascheau, intitulé *Application du théorème de Sturm aux transformées des équations binômes*, t. VII, p. 126 (voir aussi le *Cours d'Algèbre supérieure* de M. Serret, t. I, p. 183). J'introduis, à cet effet, la série entière des polynômes $U_1, U_2, \dots, U_{n-1}$, en posant

$$U_k + iV_k = (x - a_{k+1} - ib_{k+1})(x - a_{k+2} - ib_{k+2}) \dots (x - a_n - ib_n),$$

et je remarque que la suite

$$U, U_1, U_2, \dots, U_{n-1}, 1$$

présente n variations pour $x = -\infty$ et n permanences pour $x = +\infty$. J'observe ensuite que trois fonctions consécutives quelconques, par exemple U, U_1, U_2 , sont liées par la relation

$$b_2 U - [b_1(x - a_2) + b_2(x - a_1)] U_1 + b_1[(x - a_2)^2 + b_2^2] U_2 = 0.$$

Sous la condition admise à l'égard des quantités $b_1, b_2, \dots$, on voit donc que, quand une fonction s'annule, la précédente et la suivante sont de signes contraires; il en résulte que, en faisant croître la variable de $-\infty$ à $+\infty$, des changements dans le nombre des variations de la suite considérée ne peuvent se produire qu'autant que c'est la première fonction qui s'évanouit. Puisqu'on perd n variations, il est donc démontré que le polynôme U passe n fois par zéro; en même temps nous voyons que, à l'égard de U , la fonction U_1 possède la propriété caractéristique de la dérivée, c'est-à-dire que le rapport $\frac{U}{U_1}$ passe toujours, en s'évanouissant, du négatif au positif, pour des valeurs croissantes de la variable.

Note relative à deux théorèmes de Lagrange sur le centre de gravité; par M. JUNG.

(Séance du 9 mai 1879.)

Deux Notes intéressantes sur le même sujet de nos savants confrères MM. Laisant et Darboux ⁽¹⁾ ont inspiré les considérations qui forment l'objet de cette Communication.

Étant données n masses m_i concentrées en autant de points A_i d'un plan π ($i=1, 2, \dots, n$), soient G leur centre de gravité et M leur somme Σm , c'est-à-dire la masse totale. Désignant par (x) , (y) deux droites orthogonales du plan π se coupant au point quelconque O , et par x_i, y_i les coordonnées de A_i par rapport à ces droites, supposons formées les sommes $J_x = \Sigma m_i y_i^2$ et $J_y = \Sigma m_i x_i^2$, qui sont respectivement les moments d'inertie des m_i par rapport aux droites (x) et (y) considérées successivement comme axes de moments.

Si x_0, y_0 désignent les coordonnées du centre de gravité G , et h_x, h_y les rayons de gyration relatifs à (x) et à (y) ; si, en outre, X étant l'antipôle de (x) [c'est-à-dire le centre de second degré du système par rapport à l'axe (x)], y_x en est l'ordonnée, et si, Y étant l'antipôle de (y) , x_y en est l'abscisse, on aura les relations bien connues

$$\Sigma m_i y_i^2 = h_x^2 M = y_0 y_x M,$$

$$\Sigma m_i x_i^2 = h_y^2 M = x_0 x_y M,$$

lesquelles, observant que $x_i^2 + y_i^2 = \overline{OA_i}^2$, donnent, par addition,

$$\Sigma m_i \overline{OA_i}^2 = (h_x^2 + h_y^2) M = (x_0 x_y + y_0 y_x) M.$$

Maintenant, soient $(x') \parallel (x)$ et $(y') \parallel (y)$ deux autres axes de coordonnées passant par G , et désignons par x'_y la nouvelle abscisse de Y et par y'_x la nouvelle ordonnée de X , de manière que $x_y = x_0 + x'_y$, $y_x = y_0 + y'_x$; alors on trouve, posant $\overline{OG} = D$,

$$x_0 x_y + y_0 y_x = D^2 + (x_0 x'_y + y_0 y'_x).$$

(1) Voir *Bulletin*, t. VI, p. 193, et t. VII, p. 7.

On a donc, en résumant,

$$(\alpha) \quad \Sigma m_i \overline{OA_i}^2 = H^2 M,$$

où

$$(1) \quad H^2 = h_x^2 + h_y^2,$$

$$(2) \quad H^2 = x_0 x_y + y_0 y_x,$$

$$(3) \quad H^2 = D^2 + (x_0 x'_y + y_0 y'_x), \quad D = \overline{OG};$$

chacune de ces identités, combinée avec l'équation (α) , donne un théorème bien facile à énoncer. Par exemple, de l'équation (1) , on a :

1° *L'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant pour cathètes les rayons de gyration correspondant à deux droites orthogonales quelconques passant par O, multipliée par la masse totale M, est, quel que soit le point O, égale à la somme $\Sigma m_i \overline{OA_i}^2$.*

Proposition qui contient le théorème bien connu :

La somme $J_x + J_y$ relative à deux droites (x) , (y) de π , orthogonales et passant par O, est indépendante de l'orientation des (x) , (y) dans le plan π .

Et de l'équation (2) on a :

2° *Si X et Y sont les antipôles de ces droites (x) et (y) , la somme de rectangles $(x_0 x_y + y_0 y_x)$ ayant pour dimensions, l'un les distances de Y et G de (x) , et l'autre les distances de X et G de (y) , est aussi indépendante de l'orientation de (x) et (y) dans le plan π , et se conserve constamment égale à $\Sigma m_i \overline{OA_i}^2$.*

De l'équation (3) , H et D ne dépendant que de O et G, on tire une proposition analogue qui se rapporte à la somme de rectangles $(x_0 x'_y + y_0 y'_x)$.

Mais il y a de plus :

3° *Cette dernière somme $(x_0 x'_y + y_0 y'_x)$, non-seulement ne dépend pas de l'orientation des droites (x) et (y) dans le plan π , mais elle est indépendante même de O, c'est-à-dire qu'elle reste invariable de quelque manière que le point O se déplace en π .*

On pourrait se persuader de cette vérité partant du théorème II de Lagrange ; mais, indépendamment de ce théorème, elle se démontre par la simple observation que, l'orientation de (x) , (y) , et par conséquent de (x') , (y') , n'ayant pas d'influence sur la valeur $(x_0x'_y + y_0y'_x)$, on peut supposer que (x') , (y') coïncident avec les *axes principaux* $(\bar{x}')$, $(\bar{y}')$ du système. En effet, désignant par $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{x}'_y, \bar{y}'_x$ les quantités relatives à cette orientation particulière, analogues à x_0, y_0, x'_y, y'_x , par $\bar{k}_x, \bar{k}_y$ les rayons de gyration correspondant à $(\bar{x}')$, $(\bar{y}')$, et par k_x, k_y ceux relatifs à deux autres axes orthogonaux (x') , (y') passant par le centre de gravité G, on a

$$x_0x'_y + y_0y'_x = \bar{x}_0\bar{x}'_y + \bar{y}_0\bar{y}'_x$$

et

$$\bar{x}_0\bar{x}'_y = \bar{k}_x^2, \quad \bar{y}_0\bar{y}'_x = \bar{k}_y^2 \quad (1);$$

par conséquent, (x') étant perpendiculaire à (y') ,

$$k_x^2 + k_y^2 = \bar{k}_x^2 + \bar{k}_y^2 = \text{const.} = x_0x'_y + y_0y'_x, \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Posant

$$(4) \quad K^2 = k_x^2 + k_y^2,$$

au lieu des équations (3) et (α), on peut écrire

$$(5) \quad H^2 = D^2 + K^2,$$

$$(6) \quad \sum m_i \overline{OA_i}^2 = D^2 M + \sum m_i \overline{GA_i}^2.$$

Maintenant, si l'on convient de nommer *moment d'inertie du système par rapport* (ou *correspondant*) à un point O la somme $\sum m_i \overline{OA_i}^2$, et *rayon de gyration par rapport* à O le segment H défini par l'identité

$$H^2 = \frac{\sum m_i \overline{OA_i}^2}{M},$$

(1) On sait qu'un point est réciproque (conjugué) à tous les points de son antipolaire; que les points réciproques AA', BB', CC', ... placés sur une droite r sont conjugués en involution; que, si r passe par G, ce point est le centre de l'involution; et qu'enfin la constante GA.GA' de cette involution est (en valeur absolue) égale au carré du rayon de gyration correspondant au diamètre conjugué à r (voir, par exemple, mes Notes dans les *Rendiconti*, années 1875, 1876, 1879).

les équations (5) et (6) permettent de conclure qu'entre deux moments d'inertie se rapportant, l'un à un point arbitraire O, l'autre au centre de gravité G du système donné de masses, et entre les rayons correspondants de gyration H et K, il y a la même relation bien connue qui existe entre les quantités analogues se rapportant à un axe quelconque (x) et à l'axe parallèle (x') passant par G, c'est-à-dire qu'on a le théorème suivant :

THÉOREME A. — *Le moment d'inertie du système de masses données par rapport à un point O [ou à un axe (x)] est égal au moment d'inertie du système par rapport au centre de gravité G [ou respectivement par rapport à l'axe barycentrique (x') || (x)], augmenté du moment d'inertie par rapport au même point O [ou respectivement par rapport au même axe (x)] de la masse totale M concentrée au point G. Le rayon de gyration H par rapport à O [ou à (x)] est l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant pour côtés : 1° la distance D du point O [ou respectivement de l'axe (x)] de G; 2° le rayon de gyration K relatif à G [ou respectivement à (x')].*

Tout ce qui précède est indépendant des théorèmes de Lagrange, et il serait bien facile d'en déduire ces deux théorèmes; mais je préfère les considérer comme connus et remarquer que, si l'on en invoque un, l'autre s'ensuit immédiatement de l'équation (6). En effet, pour s'en convaincre, il suffit d'observer que les deux théorèmes de Lagrange s'expriment, avec nos notations, par les identités suivantes :

$$(8) \quad \text{I.} \quad \frac{\sum \overline{m_r m_s A_r A_s}^2}{M} = \sum m_i \overline{GA_i}^2,$$

$$(9) \quad \text{II.} \quad \sum m_i \overline{OA_i}^2 = D^2 M + \frac{\sum \overline{m_r m_s A_r A_s}^2}{M},$$

et de comparer ces identités avec l'équation (6). L'équation (8) donne, en outre, le théorème suivant :

THÉOREME B. — *La somme des produits des masses combinées deux à deux et respectivement multipliées par le carré de leur distance respective est égale au moment d'inertie du système par rapport au centre de gravité G, multiplié par la masse totale.*

On peut donc raisonnablement regarder toutes les propositions énoncées ci-dessus comme contenues dans celles de Lagrange, ou, si l'on veut, on peut considérer le théorème A, combiné avec B, comme des énoncés différents des théorèmes de Lagrange.

Ajoutons encore comme conséquences évidentes :

THÉORÈME C. — *La somme constante de rectangles $x_0 x'_r + y_0 y'_x$ définie plus haut, multipliée par le carré de la masse totale, est égale à la somme de produits $\Sigma \Sigma m_r m_s \overline{A_r A_s}^2$ définie dans le théorème B.*

THÉORÈME D. — *Quel que soit le point O en π , si D est sa distance du centre de gravité et H son rayon de gyration, la différence $H^2 - D^2$ est constante.*

Des considérations tout à fait semblables aux précédentes conduisent aux théorèmes analogues pour le cas où les masses m_i sont concentrées en des points A_i placés d'une manière quelconque dans l'espace.

Encore une remarque. Le premier théorème dont M. Darboux s'occupe dans sa Note s'exprime par la formule

$$(\beta) \quad \overline{OR}^2 = M \Sigma m_i \overline{OA_i}^2 - \Sigma \Sigma m_r m_s \overline{A_r A_s}^2,$$

laquelle, comme ce savant géomètre l'observe, coïncide avec le théorème II de Lagrange, si l'on pose

$$\overline{OR} = M \cdot \overline{OG} = MD.$$

Par cette même position, nos équations (5) et (6) deviennent

$$\begin{aligned} \overline{OR}^2 &= M^2 (H^2 - K^2), \\ \overline{OR}^2 &= M \Sigma m_i \overline{OA_i}^2 - M \Sigma m_i \overline{GA_i}^2, \end{aligned}$$

lesquelles sont susceptibles de l'interprétation suivante :

THÉORÈME E. — *Les m_i étant des masses concentrées aux points A_i , et O désignant un point arbitraire, la résultante $\overline{OR}$ des forces $m_i \overline{OA_i}$ est telle, que le rapport de son carré au carré de la masse totale est égal à la différence des carrés des deux rayons de gyration du système, correspondant l'un au point donné O et l'autre au centre de gravité G.*

Cette résultante $\overline{OR}$ varie en général avec O; mais elle reste constante en grandeur pour tous les points O placés sur une circonférence quelconque de centre G.

Si au lieu de masses les m_i désignent des coefficients positifs ou négatifs affectant les points A_i (c'est précisément l'hypothèse de M. Darboux), il y a lieu à considérer le cas de $\Sigma m = M = 0$. Alors, à moins que la résultante $\overline{OR}$ même ne soit zéro, elle est constante en grandeur et en direction de quelque manière que le point O se déplace. Cela, entre autres, résulte aussi de l'équation (β), comme M. Darboux l'a observé.

Mais, dans ce cas, si on laisse de côté un quelconque des points et le coefficient relatif, par exemple le point A_h avec le coefficient m_h (point affecté qu'on désigne ordinairement par $m_h A_h$), et si G_0 est le centre de gravité des autres $n - 1$ points affectés $m_i A_i$ ($i = 1, 2, \dots, h-1, h+1, \dots, n$), on sait ⁽¹⁾ que cette résultante constante, en grandeur et en direction, est donnée par

$$\overline{OR} = m_h \overline{G_0 A_h},$$

de manière que, dans cette hypothèse de $M = 0$ et de $\overline{OR}$ non zéro, l'équation (β) devient

$$\Sigma \Sigma m_r m_s \overline{A_r A_s}^2 = - m_h^2 \overline{G_0 A_h}^2.$$

Maintenant, observant que $m_h \overline{G_0 A_h}^2$ n'est autre chose que le moment d'inertie du point A_h affecté du coefficient m_h par rapport au point G_0 , on a le théorème suivant :

THÉOREME F. — *Si pour $M = 0$ la somme constante*

$$\Sigma \Sigma m_r m_s \overline{A_r A_s}^2$$

n'est pas nulle, elle équivaut au moment d'inertie de l'un quelconque A_h des n points donnés, pris par rapport au centre de gravité G_0 des autres $n - 1$ et multiplié par le coefficient correspondant m_h , changé de signe.

⁽¹⁾ CREMONA, *Elementi di Calcolo grafico*, n° 124, p. 65 (Torino, 1874); cfr. MÖBIUS, *Lehrbuch der Statik*, t. I, § 107, p. 197 (Leipzig, 1837).

L'interprétation de la même somme pour le cas de M différent de zéro est contenue dans le théorème B, car évidemment ce théorème subsiste aussi dans l'hypothèse actuelle où les m_i ne désignent plus des masses (ou coefficients *positifs*), mais des coefficients quelconques (*positifs* ou *négatifs*).

On peut considérer ce qui précède comme une manière différente d'établir et d'énoncer le deuxième théorème dont M. Darboux s'est occupé, et dont on pourrait tirer les conséquences (*Bulletin*, t. VII, p. 11) d'une autre manière encore, en les déduisant directement des *Elementi di Calcolo grafico* (n° 121, p. 63) cités plus haut; précisément comme le premier théorème traité par M. Darboux (*loc. cit.*, p. 8) pourrait aussi se déduire presque immédiatement du n° 119, p. 65 du même Ouvrage de M. Cremona.

*Solution simple d'un problème de Géométrie descriptive
élémentaire; par M. HERMARY.*

(Séance du 23 mai 1879.)

Inscrire une sphère dans un tétraèdre. (D'une manière plus générale : Déterminer les sphères tangentes à quatre plans.)

Lemmes évidents. — I. Une sphère étant inscrite dans un dièdre, si l'on vient à fermer le dièdre dans le sens convenable pour écraser la sphère, les points de contact viennent en coïncidence.

II. Si une sphère est inscrite dans un trièdre, les points de contact sont tous les trois à la même distance du sommet.

Solution. — Je rabats trois des faces du tétraèdre sur la quatrième prise pour base, toujours de manière à écraser la sphère que j'ai en vue. Après cette opération, tous les points de contact doivent être en coïncidence (lemme I) et les trois rabattements du sommet doivent être tous les trois à la même distance du point où la coïncidence a lieu (lemme II). Ce point est donc le centre du cercle qui passe par les trois rabattements.

Discussion. — Je donne un signe à chaque rabattement, ainsi qu'à la base, qui est son propre rabattement, et je conviens que deux rabattements seront de même signe si les triangles qui forment les faces empiètent l'un sur l'autre; ils seront de signes contraires dans l'autre cas. On voit immédiatement qu'un changement de tous les signes ne change pas la solution. Il y a toujours huit solutions, savoir :

- ++++... 1 solution. — Sphère inscrite proprement dite;
- +++— et permutations... 4 solutions. — Sphères exinscrites analogues aux cercles exinscrits du triangle;
- ++—— et permutations... 3 solutions. — Sphères inscrites dans les *combles*.

J'ai fait la figure (1) pour l'un de ces derniers cas, qui sont les plus intéressants.

BCD est le triangle pris pour base; les rabattements du sommet A sont désignés par cette lettre affectée d'un indice qui rappelle le sommet opposé au triangle rabattu, et, en outre, d'un accent dans le cas du rabattement de signe contraire à la base.

Pour déterminer la sphère du comble BC, j'ai donc pris les rabattements A_d , A'_b et A'_c . On voit immédiatement que les perpendiculaires aux milieux des côtés $A_dA'_c$ et $A_dA'_b$ sont les bissectrices des angles $A_dBA'_c$ et A'_bCA_d . La condition pour que la sphère soit dans le comble BC est

$$BCA + \frac{BCD + DCA - BCA}{2} + CBA + \frac{CBD + DBA - CBA}{2} > 2 \text{ droits}$$

ou

$$(BCA + BCD + DCA) + (CBA + CBD + DBA) > 4 \text{ droits.}$$

Si cette condition n'est pas satisfaite, son analogue l'est forcément pour le côté AD, et la sphère se trouve dans le comble dont ce côté est la faite, etc.

Scolie. — Lorsqu'une sphère est inscrite dans un trièdre, le point de contact de l'une des faces est sur la bissectrice de l'angle formé par les rabattements du troisième côté autour des côtés de

(1) Le lecteur est prié de faire la figure.

ladite face. Cela résulte de la solution précédente, et cela peut s'établir directement sans la considération de la quatrième face du tétraèdre.

D'autre part, les distances de ce point de contact aux deux côtés sont proportionnelles aux cotangentes des demi-dièdres adjacents. Cette condition détermine également une droite qui passe par le point de contact de la sphère et qui doit nécessairement coïncider avec la bissectrice dont il a été question.

En exprimant que cette coïncidence a lieu, on trouve une série de formules de la Trigonométrie sphérique.

Note sur les relations entre les éléments caractéristiques d'une courbe gauche et les accélérations du point qui la décrit; par
M. HAAG.

(Séance du 9 mai 1879.)

Lorsqu'un point mobile décrit une trajectoire, il est clair qu'il doit exister des relations entre les éléments géométriques qui caractérisent cette trajectoire et les accélérations de divers ordres du point qui la décrit. En effet, la connaissance de ces accélérations entraîne celle de la courbe, et par suite celle des éléments géométriques qui, comme la tangente, le plan osculateur et le rayon de courbure, servent à la caractériser en chacun de ses points.

J'ai donné ces relations pour le cas des courbes planes dans les feuilles autographiées du *Cours de Géométrie* commencé à l'École polytechnique de Bordeaux en 1870. Depuis, dans une Note insérée aux *Annales de l'École Normale* (année 1874, p. 147), M. Bouquet a développé une méthode analytique permettant de calculer ces mêmes relations pour les courbes gauches. Je reviens aujourd'hui sur la question pour montrer que le calcul géométrique très-simple par lequel j'étais arrivé au résultat dans le cas des courbes planes peut s'étendre sans difficulté aux courbes à double courbure.

Considérons en un point m de la courbe gauche le trièdre tri-

rectangle formé par la tangente mt dirigée dans le sens du déplacement sur la courbe, la normale principale mn dirigée vers le centre de courbure, et la binormale mp dirigée vers le centre de cambrure, c'est-à-dire du côté du plan osculateur où est situé le centre de la sphère osculatrice.

Désignons par $d\alpha$ l'angle de contingence et par $d\theta$ l'angle de torsion correspondant à l'arc élémentaire ds . Désignons encore par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$ les coefficients différentiels $\frac{d\alpha}{ds}, \frac{d\theta}{ds}$ et leurs dérivées respectives par rapport à l'arc, et par ν la vitesse $\frac{ds}{dt}$ du point mobile.

Enfin, appelons T, N et P des grandeurs géométriques égales à l'unité portées dans les trois directions mt, mn et mp précédemment définies.

Il est facile de reconnaître qu'on a

$$(1) \quad \begin{cases} dT = N d\alpha = N \nu \alpha_1 dt, \\ dN = -T d\alpha + P d\theta = (-T \nu \alpha_1 + P \nu \theta_1) dt, \\ dP = -N d\theta = -N \nu \theta_1 dt. \end{cases}$$

Cela posé, si u est le rayon vecteur du point mobile m , la grandeur géométrique de sa vitesse sera

$$(2) \quad \frac{du}{dt} = \nu T,$$

et les différentiations successives de ce produit fourniront sans difficulté les accélérations d'ordres successifs du point mobile. Ainsi,

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{d\nu}{dt} T + \nu^2 \alpha_1 N, \\ \frac{d^3 u}{dt^3} = \left(\frac{d^2 \nu}{dt^2} - \nu^3 \alpha_1^2 \right) T + \left(3\nu \frac{d\nu}{dt} \alpha_1 + \nu^3 \alpha_2 \right) N + \nu^3 \alpha_1 \theta_1 P, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

Sans pousser plus loin les calculs, on voit parfaitement quelle est la marche à suivre pour obtenir l'expression générale de l'accélération d'ordre n au moyen des fonctions $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \theta_1, \theta_2, \dots$ qui caractérisent géométriquement la courbe.

Pour achever de résoudre la question proposée, il reste à trouver les relations qui lient ces fonctions $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \theta_1, \theta_2, \dots$ aux éléments géométriques d'une nature différente qui ont été adoptés jusqu'ici dans l'étude générale des courbes gauches.

Ces relations s'établissent sans aucune difficulté. Par exemple, en désignant par ρ et r les rayons de courbure et de cambrure, on a immédiatement

$$\alpha_1 = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\rho},$$

$$\theta_1 = \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{r}.$$

Soit maintenant R le rayon de la sphère osculatrice ; d'après une relation connue,

$$R^2 = \rho^2 + r^2 \left(\frac{d\rho}{ds} \right)^2,$$

et, comme $\frac{d\rho}{ds} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_1^2} = -\rho^2 \alpha_2$,

$$R^2 = \rho^2 + \rho^4 r^2 \alpha_2^2,$$

d'où

$$\alpha_2 = \pm \frac{\sqrt{R^2 - \rho^2}}{\rho^2 r} = \pm \frac{h}{\rho^2 r},$$

en désignant par h la grandeur positive de la perpendiculaire abaissée du centre ω de la sphère osculatrice sur le plan osculateur à la courbe ; il est facile de s'assurer d'ailleurs que c'est le signe — qui doit être adopté devant la valeur de α_2 .

Le mode de formation des équations (3) permet d'énoncer le théorème suivant :

Lorsqu'un point mobile décrit une courbe gauche, si sa vitesse et ses n premières accélérations sont données, son accélération d'ordre $n + 1$ a son extrémité située sur une parallèle à la tangente et son accélération d'ordre $n + 2$ a son extrémité située dans un plan parallèle au plan osculateur.

Cette proposition est l'analogie, pour les courbes gauches, d'un théorème que nous avons précédemment démontré sur les surfaces (*Bulletin*, t. V, p. 166).

Terminons enfin par une remarque relative à l'expression de la

suraccélération. Si dans cette expression on suppose v constant, et si l'on remplace α_1 , α_2 et θ_1 par leurs valeurs, on trouve

$$\frac{d^3 u}{dt^3} = -\frac{v^3}{\rho^3} T - \frac{v^3 h}{\rho^2 r} N + \frac{v^3}{\rho r} P,$$

et la valeur des composantes dirigées suivant la normale et la perpendiculaire au plan osculateur fait voir que leur résultante partielle est dirigée suivant la perpendiculaire au rayon $m\omega$ de la sphère osculatrice. Il en résulte que, *dans le mouvement uniforme d'un point sur une courbe gauche, la suraccélération est située dans le plan tangent à la sphère osculatrice*, propriété qui a quelque analogie avec celle de l'accélération, dirigée suivant la normale principale dans le mouvement uniforme (1).

Intégrales des courbes dont les développantes par le plan et les développées par le plan sont égales entre elles;
par M. l'abbé Aoust.

(Séance du 27 juin 1879.)

1. *État de la question.* — Lancet appelle *développée par le plan d'une courbe* l'arête de rebroussement de la surface enveloppe du plan normal à cette courbe, de sorte que, réciproquement, cette dernière est la développante par le plan de la première. Dans la question posée, il y a trois espèces de courbes à considérer : les courbes C, qui sont les développantes par le plan

(1) Il est facile de s'assurer par le calcul algébrique de l'exactitude de ce dernier résultat. En effet, rapportons le point mobile décrivant la courbe à des coordonnées ayant leur origine au centre de la sphère osculatrice; la quantité

$$x^2 + y^2 + z^2,$$

étant constante pendant trois éléments de temps consécutifs, pourra être trois fois différenciée comme telle, et, si l'on observe, dans ces différentiations, que

$$dx^2 + dy^2 + dz^2$$

est aussi constant parce que la vitesse est uniforme, on arrive à la relation

$$dx d^2 x + dy d^2 y + dz d^2 z = 0,$$

qui exprime précisément le résultat ci-dessus énoncé.

des courbes C_1 ; les courbes C_2 , qui sont les développées par le plan des courbes C_1 . La question consiste à déterminer les courbes C_1 de telle sorte que les courbes C et les courbes C_2 soient égales entre elles.

Cette question est, dans sa généralité, au-dessus des forces de l'analyse, à cause des intégrations qui ne peuvent s'effectuer, mais elle mérite l'attention des géomètres à cause des simplifications dont elle est susceptible et des faits qui sont dévoilés par l'usage des coordonnées naturelles des courbes. En effet, lorsqu'on fait usage des coordonnées cartésiennes, on est conduit à une équation différentielle du douzième ordre; au contraire, si l'on fait usage des coordonnées naturelles, la question se partage en trois opérations distinctes, qui sont : 1° l'intégration d'une équation différentielle linéaire du quatrième ordre; 2° l'intégration d'une équation différentielle linéaire du troisième ordre; 3° une triple quadrature. Or, ces deux équations différentielles se ramènent à deux équations différentielles identiques du troisième ordre, l'une et l'autre linéaires. Lorsqu'on a trouvé les intégrales des courbes C_1 , on obtient les intégrales des courbes C et des courbes C_2 sans intégrations nouvelles. Il existe d'ailleurs des cas intéressants dans lesquels l'intégration de l'équation résolvante du troisième ordre est possible, ainsi que le calcul des quadratures, et, dans ces cas, la question obtient une solution complète. Cette question peut être généralisée si, au lieu de se donner la condition que les courbes C et C_2 sont égales, on se donne la condition que ces courbes sont semblables.

2. *Équation résolvante.* — Soient $d\sigma$, $d\epsilon$, $d\omega$ l'arc élémentaire, l'angle de contingence et l'angle de torsion de la courbe C ; soient ψ le rapport de $d\epsilon$ à $d\omega$ exprimé en fonction de ω dont la différentielle est $d\omega$, ρ et τ les rayons de courbure et de torsion; nous représentons par les mêmes lettres marquées des indices inférieurs 1 et 2 les éléments de même nom des courbes C_1 et C_2 .

La nature de la question laisse indéterminé le rapport ψ ; en effet, on a, par suite de l'égalité des courbes C et C_2 , la série des rapports égaux

$$(1) \quad \frac{d\omega}{d\epsilon} = \frac{d\omega_2}{d\epsilon_2} = \frac{\rho}{\tau} = \frac{\rho_2}{\tau_2};$$

or, les conditions du problème étant que ρ et ρ_2 sont égaux entre eux ainsi que τ et τ_2 , comme l'égalité des rayons de courbure ρ et ρ_2 entraîne, par suite des équations (1), l'égalité des rayons de torsion τ et τ_2 et réciproquement, il en résulte que le rapport ψ reste indéterminé.

Par suite de la relation qui existe entre le rayon de courbure d'une courbe et le rayon de courbure de l'arête de rebroussement, on a les deux équations

$$(2) \quad -\rho_1 = \rho + \frac{d^2 \rho}{d\omega^2}, \quad -\rho_2 = \rho_1 + \frac{d}{\psi d\omega} \left(\frac{d\rho_1}{\psi d\omega} \right),$$

dont la seconde se déduit de la première par suite des égalités suivantes :

$$d\epsilon = d\omega_1, \quad d\omega = d\epsilon_1, \quad d\epsilon_1 = d\omega_2, \quad d\omega_1 = d\epsilon_2.$$

Donc, si l'on suppose ρ_2 et ρ égaux entre eux, et qu'on représente par ψ' la dérivée de ψ par rapport à ω , on tombera sur l'équation différentielle linéaire du quatrième ordre

$$(3) \quad \frac{d^4 \rho}{d\omega^4} - \frac{\psi'}{\psi} \frac{d^3 \rho}{d\omega^3} + (1 + \psi^2) \frac{d^2 \rho}{d\omega^2} - \frac{\psi'}{\psi} \frac{d\rho}{d\omega} = 0,$$

qui est l'équation résolvante du problème. Posons $\frac{d\rho}{d\omega}$ égal à μ ; l'équation précédente passe au troisième ordre et deviendra

$$(4) \quad \frac{d^3 \mu}{d\omega^3} - \frac{\psi'}{\psi} \frac{d^2 \mu}{d\omega^2} + (1 + \psi^2) \frac{d\mu}{d\omega} - \frac{\psi'}{\psi} \mu = 0.$$

3. Intégrales de l'équation résolvante. — Soient M_1, M_2, M_3 trois solutions particulières de l'équation (4), et A_0, A_1, A_2, A_3 quatre constantes arbitraires; l'intégrale générale de l'équation (3) sera

$$\rho = A_0 + \Sigma A \int M d\omega,$$

le signe Σ s'étendant aux valeurs que prend l'expression placée sous ce signe lorsque A et M sont affectés des indices 1, 2, 3. Cette intégrale exprime la valeur du rayon de courbure de la courbe C en fonction de ω .

Pour avoir le rayon de courbure ρ_1 de la courbe C_1 , il faut recourir à la première des équations (2), laquelle donne l'expression

suivante de ρ_1 :

$$(6) \quad \rho_1 = -A_0 - \Sigma A \left(\frac{dM}{d\omega} + \int M d\omega \right).$$

La valeur de τ_1 se déduit de cette expression ; en effet, on a les relations

$$\tau_1 = \rho_1 \frac{d\epsilon_1}{d\omega_1} = \rho_1 \frac{d\omega}{d\epsilon};$$

il suffit donc de diviser par ψ le second membre de l'équation (6) pour avoir τ_1 .

La valeur du rayon de courbure ρ_2 de la courbe C_2 s'obtient de même sans difficulté au moyen de la seconde des équations (2) :

$$(7) \quad \rho_2 = A_0 + \Sigma A \left[\frac{dM}{d\omega} + \int M d\omega + \frac{d}{\psi d\omega} \left(\frac{d^2 M}{\psi d\omega^2} + \frac{M}{\psi} \right) \right].$$

La valeur du rayon de torsion τ_2 de la courbe C_2 s'obtient en multipliant par ψ le second membre de cette dernière équation.

4. *Intégrales premières.* — L'intégrale générale de l'équation (3) n'est pas possible, mais on peut en obtenir une intégrale première. Ce fait a une grande importance dans cette question.

En effet, si l'on multiplie la première des équations (2) par $2d\rho$ et la seconde par $2d\rho_1$, qu'on ajoute et qu'on intègre, on trouve

$$(8) \quad -2\int \rho_1 d\rho_1 - 2\int \rho_1 d\rho = \rho^2 + \frac{d\rho^2}{d\omega^2} + \rho_1^2 + \frac{d\rho_1^2}{\psi^2 d\omega^2};$$

or, si l'on intègre par parties la première intégrale du premier membre, et qu'on représente par c^2 la constante d'intégration, ce premier membre se réduit au binôme $c^2 - 2\rho_1 \rho_2$; on a donc, réductions faites, l'équation

$$(8)' \quad c^2 - \frac{d\rho^2}{d\omega^2} - \left(\frac{d^2 \rho}{d\omega^2} \right)^2 = \frac{1}{\psi^2} \left(\frac{d\rho}{d\omega} + \frac{d^3 \rho}{d\omega^3} \right)^2,$$

qui est du troisième ordre et qui devient du second ordre en μ . Nous l'écrivons sous la forme suivante :

$$(8)'' \quad \psi d\mu = \frac{\mu d\mu + \frac{d\mu}{d\omega} d \left(\frac{d\mu}{d\omega} \right)}{\sqrt{c^2 - \mu^2 - \frac{d\mu^2}{d\omega^2}}}.$$

Sous cette forme, elle devient une seconde fois intégrable si le rapport ψ est donné en fonction de μ . En effet, si l'on pose $\psi = f'(\mu)$, on obtient, par l'intégration immédiate,

$$f(\mu) = \sqrt{c^2 - \mu^2 - \frac{d\mu^2}{d\omega^2}}.$$

On a donc les deux équations

$$(9) \quad d\mu = \frac{d\mu}{\sqrt{c^2 - \mu^2 - f'(\mu)^2}}, \quad d\omega = \frac{f'(\mu) d\mu}{\sqrt{c^2 - \mu^2 - f'(\mu)^2}}.$$

L'intégration de la première donne μ en fonction de ω ; soit $F(\omega)$ cette fonction, qui contient deux constantes arbitraires; on a les deux relations •

$$\mu = F(\omega), \quad dz = f'[F(\omega)] d\omega,$$

et conséquemment les deux intégrales

$$\rho = \int F(\omega) d\omega, \quad s = \int f'[F(\omega)] d\omega,$$

dans chacune desquelles est contenue une nouvelle constante arbitraire.

Il est évident que ces deux relations sont les deux équations naturelles de la courbe C.

On en déduit : 1° la rectification de la courbe C, puisque l'arc de courbe s est donné par l'équation

$$s = \int f'[F(\omega)] d\omega \int F(\omega) d\omega;$$

2° le rayon de torsion de cette même courbe, lequel est donné par la dérivée par rapport à ω de l'équation précédente.

Il serait facile, comme on l'a fait au numéro précédent, d'obtenir les rayons de courbure et de torsion des courbes C_1 et C_2 , et par conséquent les équations naturelles de ces courbes.

5. *Du trièdre des axes mobiles.* — La tangente τ , la binormale ν , et la normale principale ρ , forment, en chaque point de la courbe C_1 , un trièdre trirectangle; or la direction de chacune des arêtes de ce trièdre ne dépend que du rapport $\frac{ds}{d\omega}$, que nous

avons représenté par ψ . En effet, on a les trois équations

$$(10) \quad \begin{cases} d \cos(\tau_1, x) = d\omega \cos(\rho_1, x), \\ d \cos(\nu_1, x) = d\varepsilon \cos(\rho_1, x), \\ d \cos(\rho_1, x) = -d\omega \cos(\tau_1, x) - d\varepsilon \cos(\nu_1, x), \end{cases}$$

de sorte que, si l'on veut intégrer le système, on trouve l'équation résultante

$$(4)' \quad \begin{cases} \frac{d^3 \cos(\tau_1, x)}{d\omega^3} - \frac{\psi'}{\psi} \frac{d^2 \cos(\tau_1, x)}{d\omega^2} \\ + (1 + \psi^2) \frac{d \cos(\tau_1, x)}{d\omega} - \frac{\psi'}{\psi} \cos(\tau_1, x) = 0. \end{cases}$$

Cette équation résolvante est identiquement la même que l'équation (4); conséquemment, si l'on représente par a_1, a_2, a_3 trois constantes, on a l'intégrale générale

$$\cos(\tau_1, x) = \Sigma a M,$$

la somme Σ s'étendant à toutes les valeurs que prend le produit aM lorsqu'on affecte simultanément a et M des indices 1, 2, 3.

Soient maintenant $b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ six nouvelles constantes qui sont des fonctions des précédentes; par suite de l'orthogonalité des axes, on a le Tableau suivant :

$$\begin{aligned} \cos(\tau_1, x) &= \Sigma a M, & \cos(\tau_1, y) &= \Sigma b M, & \cos(\tau_1, z) &= \Sigma c M, \\ \cos(\rho_1, x) &= \Sigma a \frac{dM}{d\omega}, & \cos(\rho_1, y) &= \Sigma b \frac{dM}{d\omega}, & \cos(\rho_1, z) &= \Sigma c \frac{dM}{d\omega}, \\ \cos(\nu_1, x) &= \Sigma (b_1 c_2 - c_1 b_2) \left(\frac{M_1 dM_2 - M_2 dM_1}{d\omega} \right), \\ \cos(\nu_1, y) &= \Sigma (c_1 a_2 - a_1 c_2) \left(\frac{M_1 dM_2 - M_2 dM_1}{d\omega} \right), \\ \cos(\nu_1, z) &= \Sigma (a_1 b_2 - b_1 a_2) \left(\frac{M_1 dM_2 - M_2 dM_1}{d\omega} \right), \end{aligned}$$

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs des expressions placées sous ce signe par suite de la rotation simultanée des indices.

Il résulte de cette analyse que la direction des axes du trièdre mobile ne dépend aussi que de la valeur de $\frac{d\rho}{d\omega}$ fournie par l'inté-

gration de l'équation (8)', dans laquelle on suppose la constante c^2 égale à l'unité.

Il importe de remarquer que deux des trois constantes a_1, a_2, a_3 sont arbitraires, parce que la somme des carrés des cosinus des angles que l'axe des x fait avec les trois axes mobiles est égale à l'unité. Ceci revient à dire que la question qui consiste à déterminer la direction des axes mobiles en fonction de ψ ne peut dépendre que d'une équation différentielle du second ordre. On trouve immédiatement cette équation lorsqu'on remplace dans le système (10) la deuxième équation par la relation

$$\cos^2(\tau_1, x) + \cos^2(\nu_1, x) + \cos^2(\rho_1, x) = 1;$$

on obtient alors l'équation différentielle

$$\psi = \frac{\frac{d^2 \cos(\tau_1, x)}{d\omega^2} + \cos(\tau_1, x)}{\sqrt{1 - \cos^2(\tau_1, x) - \left[\frac{d \cos(\tau_1, x)}{d\omega} \right]^2}},$$

qui concorde avec l'équation (8)", dans laquelle il suffit et il est nécessaire de faire la constante c égale à l'unité. Cette conclusion confirme ce que nous venons de dire dans le précédent alinéa.

Le D^r Hoppe a, le premier, démontré par une transformation analytique élégante, et nous avons aussi démontré par des considérations géométriques, dans notre *Analyse des courbes dans l'espace*, que cette dernière équation est réductible à une équation différentielle linéaire du second ordre; mais cette équation simplifiée présente toujours les mêmes difficultés d'intégration.

6. *Coordonnées cartésiennes des courbes.* — Commençons par déterminer les coordonnées de la courbe C_1 ; si l'on représente par $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ trois constantes arbitraires, on déduit de la relation triple se rapportant aux trois axes x, y, z ,

$$\frac{dx_1}{d\sigma_1} = \cos(\tau_1, x),$$

les trois équations contenues dans le type suivant :

$$x_1 - \alpha_1 = \int \cos(\tau_1, x) d\sigma_1.$$

Or, si l'on y remplace les cosinus des angles que τ , fait avec les trois axes fixes par leurs valeurs données par les premières équations (11) et $d\sigma$, par l'expression fournie par l'équation (6), on a les trois relations données par le type suivant :

$$(12) \quad x_1 - \alpha_1 = - \int \left(A_0 + \Sigma A \frac{dM}{d\omega} + \Sigma A f M d\omega \right) (\Sigma a M) d\omega,$$

lesquelles donnent les trois coordonnées cartésiennes de la courbe C_1 .

Les coordonnées x, y, z de la courbe C et les coordonnées x_2, y_2, z_2 de la courbe C_2 sont données par les équations contenues dans les deux types suivants :

$$(C) \quad x_1 - x = \rho \cos(\rho_1, x) - \frac{d\rho}{d\omega} \cos(\tau_1, x),$$

$$(C_2) \quad x_2 - x_1 = \rho_1 \cos(\rho_1, x) - \frac{d\rho_1}{\psi d\omega} \cos(\nu_1, x),$$

dans lesquelles toutes les quantités, à l'exception des coordonnées du point de la courbe que l'on considère, sont connues en fonction de ω , par suite des équations (11) et (12).

7. *Applications.* — L'intégration de l'équation (4) n'est pas possible d'une manière générale; mais nous avons fait connaître, dans notre *Analyse des courbes dans l'espace*, les séries des différentes valeurs de ψ dans lesquelles cette intégration se pratique; nous nous contenterons de l'examen de deux cas.

Premier cas :

$$\psi = 2\lambda\mu,$$

λ étant une constante. Dans ce cas, ψ étant proportionnel à μ , l'équation (8)^o donne

$$\frac{d\mu^2}{d\omega^2} = c^2 - \mu^2 - \lambda^2(\mu^2 + a^2)^2.$$

Si l'on représente par $\mathfrak{N}^2$ le second membre de cette équation,

on a les deux relations

$$(9)' \quad d\omega = \frac{d\mu}{\mathfrak{M}}, \quad d\varepsilon = \frac{2\lambda\mu d\mu}{\mathfrak{M}}.$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$c^2 - \lambda^2 a^4 = \lambda^2 A^2, \quad 1 - 2\lambda^2 a^2 = 2\lambda^2 B^2, \quad A^2 + B^2 = n^2,$$

A, B et n étant des auxiliaires, la dernière équation (9)' devient

$$d\varepsilon = \frac{2\mu d\mu}{\sqrt{n^2 - (B + \mu^2)^2}},$$

dont l'intégrale, en représentant par ε_0 la constante arbitraire, prend la forme

$$B + \mu^2 = n \sin(\varepsilon - \varepsilon_0),$$

de sorte que, si, dans cette équation, on remplace μ par sa valeur, on trouve

$$(10)' \quad 2\lambda \frac{d\omega}{d\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{n \sin(\varepsilon - \varepsilon_0) - B}},$$

dont l'intégrale dépend de la fonction elliptique de première espèce. D'une autre part on a, par la nature même de l'hypothèse, la relation

$$d\varepsilon = 2\lambda d\rho,$$

de laquelle on déduit par intégration la nouvelle relation

$$(11)' \quad 2\lambda(\rho - \rho_0) = (\varepsilon - \varepsilon_0),$$

dans laquelle $2\lambda\rho_0 - \varepsilon_0$ est une nouvelle constante. Cette équation et l'équation (10) sont les équations élémentaires de la courbe C.

On déduit de la dernière, combinée avec la relation $ds = \rho d\varepsilon$, l'équation suivante :

$$s - s_0 = \lambda\rho^2,$$

qui exprime une des deux propriétés caractéristiques de la courbe.

Trièdre des axes mobiles. — La valeur de $\cos(\nu, x)$ est donnée par l'équation différentielle (10)', dans laquelle C est l'unité et a_1 , A_1 , B_1 , n_1 , ε_1 sont de nouvelles constantes, analogues à a , A, B, n , ε_0 , et correspondent à l'hypothèse C égal à l'unité; on aura

donc les deux équations

$$\cos(\nu, x) = \sqrt{n_1 \sin(\varepsilon - \varepsilon_1) - B_1} = \frac{1}{2\lambda} \frac{d\varepsilon}{d\omega},$$

desquelles on déduit, par la différentiation,

$$\frac{d \cos(\nu, x)}{d\omega} = \frac{n_1 \cos(\varepsilon - \varepsilon_1)}{2\sqrt{n_1 \sin(\varepsilon - \varepsilon_1) - B_1}} \frac{d\varepsilon}{d\omega} = \lambda n_1 \cos(\varepsilon - \varepsilon_1).$$

On a donc, en ayant égard aux équations analogues aux équations (10),

$$\cos(\rho, x) = \lambda n_1 \cos(\varepsilon - \varepsilon_1), \quad \cos(\tau, x) = \lambda n_1 \sin(\varepsilon - \varepsilon_1) + m,$$

m étant une nouvelle constante arbitraire.

Ces équations donnent la direction des axes mobiles en fonction de ε .

Coordonnées cartésiennes. — On déduit des équations précédentes les coordonnées x, y, z de la courbe C , lesquelles sont données par le type suivant :

$$x - a = \int [m + \lambda n_1 \sin(\varepsilon - \varepsilon_1)] \rho_0 + \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{2\lambda} d\varepsilon,$$

et, comme l'intégration du second membre est possible, on a les coordonnées x, y, z de la courbe C en fonction explicite de ε .

Il est facile de voir que les coordonnées des courbes C_1 et C_2 se déduisent sans difficulté de ce qui précède.

8. Les courbes C sont des hélices. — Cette hypothèse correspond au second cas.

Second cas :

$$(13) \quad \psi = m = \text{const.}$$

L'équation (8) devient, a étant une constante,

$$\frac{d\mu^2}{d\omega^2} = c^2 - \mu^2 - m^2(\mu + a)^2;$$

on en déduit la suivante :

$$d\omega = \frac{d\mu}{\sqrt{c^2 - m^2 a^2 - 2m^2 a \mu - (1 + m^2) \mu^2}}.$$

Or, si l'on pose, pour abrégér, $1 + m^2 = k^2$, on obtient l'intégrale

$$k(\omega - \omega_0) = \arcsin \left(\sin = \frac{k^2 \mu + m^2 a}{\sqrt{c^2 k^2 - m^2 a^2}} \right),$$

et conséquemment l'équation différentielle

$$(14) \quad k^2 \frac{d\rho}{d\omega} = -m^2 a + \sqrt{c^2 k^2 - m^2 a^2} \sin k(\omega - \omega_0),$$

laquelle, lorsqu'on représente par ρ_0 la constante arbitraire, conduit par intégration à l'équation suivante :

$$(15) \quad k^2(\rho - \rho_0) = -m^2 a \omega - \sqrt{c^2 k^2 - m^2 a^2} \cos k(\omega - \omega_0).$$

Si dans cette équation on remplace ρ par sa valeur $\frac{ds}{m d\omega}$, et qu'on intègre, on obtient la rectification de la courbe par la formule suivante, dans laquelle $k^2 s_0$ est la constante d'intégration :

$$k^2(s - m\rho_0\omega - s_0) = -\frac{1}{2}m^2 a \omega^2 - \frac{m}{k} \sqrt{c^2 k^2 - m^2 a^2} \sin k(\omega - \omega_0).$$

Les équations (15) et (13) sont les équations élémentaires de la courbe.

Direction de la tangente. — Si l'on représente par a_1, k_1, ω_1 des nouvelles constantes arbitraires, on trouvera, d'après le numéro précédent, l'équation suivante :

$$\cos(\tau_1, x) = -\frac{m^2 a_1}{k_1^2} + \frac{1}{k_1} \sqrt{1 - \frac{m^2 a_1^2}{k_1^2}} \sin k_1(\omega - \omega_1),$$

qui donne la direction de la tangente τ_1 à la courbe C_1 par rapport aux trois axes fixes.

D'une autre part, si l'on a recours à la première des équations (2), on trouve la formule

$$(16) \quad \rho_1 = -\rho_0 + \frac{m^2 a}{k^2} \omega - \frac{m^2}{k} \sqrt{c^2 - \frac{m^2 a^2}{k^2}} \cos k(\omega - \omega_0),$$

qui donne le rayon de courbure de la courbe C_1 .

Coordonnées du point. — On déduit de ces formules les expressions des coordonnées x_1, y_1, z_1 de la courbe C_1 , qui sont données

par le type suivant :

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} x_1 - \alpha_1 &= \int \left[\rho_0 - \frac{m^2 a}{k^2} \omega + \frac{m^2}{k} \sqrt{c^2 - \frac{m^2 a^2}{k^2}} \cos k(\omega - \omega_0) \right] \\ &\times \left[\frac{m^2 a_1}{k_1^2} - \frac{1}{k_1} \sqrt{1 - \frac{m^2 a_1^2}{k_1^2}} \sin k(\omega - \omega_0) \right] d\omega, \end{aligned} \right.$$

et, comme le second membre de ce type est intégrable, il en résulte que les coordonnées de la courbe C_1 sont exprimables en fonction explicite de ω .

9. Généralisation du problème. — Proposons-nous maintenant la question suivante, qui est la généralisation de celle que nous avons résolue :

PROBLÈME. — *Trouver les courbes dont les développantes et les développées par le plan sont semblables entre elles.*

Conservons les notations établies; on a les mêmes données que dans le problème résolu; seulement, la condition relative à l'égalité des rayons de courbure ρ et ρ_2 est remplacée par la condition que ces rayons sont dans un rapport constant, laquelle entraîne la condition que les rayons de torsion ν et ν_2 sont dans le même rapport. On a donc les équations

$$(18) \quad \rho_2 = n^2 \rho, \quad \nu_2 = n^2 \nu,$$

n^2 étant constant; la fonction ψ reste encore indéterminée.

Si l'on a recours aux équations (2), la première condition fournit l'équation différentielle suivante :

$$(3)' \quad \frac{d^4 \rho}{d\omega^4} - \frac{\psi'}{\psi} \frac{d^3 \rho}{d\omega^3} + (1 + \psi^2) \frac{d^2 \rho}{d\omega^2} - \frac{\psi'}{\psi} \frac{d\rho}{d\omega} + (1 - n^2) \psi^2 \rho = 0,$$

qui est l'équation résolvante, puisque son intégration fait connaître ρ en fonction de ω et qu'elle donnera en même temps $\cos(\nu, x)$ en fonction de la même variable. Il suffira, en effet, de prendre la dérivée de ρ par rapport à ω et d'y faire n^2 égal à l'unité, en donnant aux constantes d'autres valeurs générales; cette dérivée représentera la valeur de $\cos(\nu, x)$, comme cela résulte de l'équation (8)".

Soient maintenant R_0, R_1, R_2, R_3 quatre solutions particulières de l'équation (3)', et A_0, A_1, A_2, A_3 quatre constantes arbitraires; l'intégrale générale de l'équation sera

$$\rho = \Sigma AR,$$

la somme Σ s'étendant toujours, suivant nos conventions, à toutes les valeurs du produit AR , lorsqu'on affecte successivement et simultanément les deux facteurs des indices 0, 1, 2, 3.

D'une autre part, si l'on représente par N_0, N_1, N_2, N_3 les valeurs de R_0, R_1, R_2, R_3 , lorsqu'on y fait n^2 égal à l'unité, et qu'on représente par B_0, B_1, B_2, B_3 quatre nouvelles constantes, on aura le type suivant relatif aux cosinus que ν fait avec les trois axes fixes,

$$\cos(\nu, x) = \Sigma B \frac{dN}{d\omega},$$

avec cette circonstance que $\frac{dN_0}{d\omega}$ est nul.

Coordonnées de la courbe C_1 . — Si l'on remonte à la première des équations (2), on aura l'équation

$$\rho_1 = - \Sigma A \left(R + \frac{d^2 R}{d\omega^2} \right),$$

et, conséquemment, les coordonnées x_1, y_1, z_1 de la courbe C_1 seront

$$x_1 - \alpha_1 = - \int \left[\Sigma B \frac{dN}{d\omega} \right] \Sigma A \left(R + \frac{d^2 R}{d\omega^2} \right) d\omega.$$

On déterminera comme précédemment les coordonnées des courbes C et C_2 .

10. *Application aux hélices.* — Dans ce cas, on a

$$\psi = m = \text{const.};$$

l'équation (3)' devient

$$(3)'' \quad \frac{d^4 \rho}{d\omega^4} + (1 + m^2) \frac{d^2 \rho}{d\omega^2} + (1 - n^2) m^2 \rho = 0.$$

Si l'on pose $\rho = e^{\alpha\omega}$, α étant une constante, on a l'équation de condition

$$\alpha^4 + (1 + m^2) \alpha^2 + (1 - n^2) m^2 = 0,$$

et les valeurs de α sont les quatre racines de cette équation; nous les représentons par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

Il y a deux cas à considérer, suivant que n^2 est positif ou négatif.

Dans le premier cas, la similitude des courbes C_2, C est directe; or, dans ce même cas, suivant que n^2 est plus grand ou moindre que l'unité, deux racines seulement ou toutes les quatre sont imaginaires.

Soit $n^2 > 1$; en appelant λ la racine réelle positive, les quatre racines sont

$$\lambda, \quad -\lambda, \quad \sqrt{(1+m^2+\lambda^2)}\sqrt{-1}, \quad -\sqrt{(1+m^2+\lambda^2)}\sqrt{-1};$$

l'intégrale générale sera donc

$$\rho = A_0 e^{\lambda\omega} + A_1 e^{-\lambda\omega} + A_2 \cos(1+m^2+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}\omega + A_3 \sin(1+m^2+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}\omega.$$

Soit $n^2 < 1$; en appelant $\lambda_1 \sqrt{-1}$ une racine imaginaire, les quatre racines imaginaires seront

$$\lambda_1 \sqrt{-1}, \quad -\lambda_1 \sqrt{-1}, \quad (1+m^2-\lambda^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}, \quad -(1+m^2-\lambda^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1},$$

et l'intégrale générale sera

$$\begin{aligned} \rho = & A_0 \cos \lambda_1 \omega + A_1 \sin \lambda_1 \omega + A_2 \cos(1+m^2-\lambda^2)^{\frac{1}{2}}\omega \\ & + A_3 \sin(1+m^2-\lambda^2)^{\frac{1}{2}}\omega. \end{aligned}$$

Dans le second cas, la similitude des courbes C_2 et C est inverse; mais, suivant que l'on a $(1-m^2)^2$ plus grand ou plus petit que $-4m^2n^2$, les quatre racines, qui sont dans les deux hypothèses imaginaires, se présentent sous l'une ou l'autre des deux formes

$$\begin{aligned} & \lambda \sqrt{-1}, \quad -\lambda \sqrt{-1}, \quad (1+m^2+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}, \quad -(1+m^2+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}, \\ & a+b\sqrt{-1}, \quad -a-b\sqrt{-1}, \quad a-b\sqrt{-1}, \quad -a+b\sqrt{-1}, \end{aligned}$$

de sorte que, dans la première hypothèse, on a

$$\rho = A_0 \cos \lambda \omega + A_1 \sin \lambda \omega + A_2 \cos(1+m^2+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}\omega + A_3 \sin(1+m^2+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}\omega,$$

et, dans la seconde,

$$\rho = (A_0 \cos b\omega + A_1 \sin b\omega) e^{a\omega} + (A_2 \cos b\omega + A_3 \sin b\omega) e^{-a\omega},$$

expression dans laquelle a et b sont faciles à déterminer.

En comparant les quatre expressions de ρ que nous venons d'obtenir, on voit qu'il n'y en a que trois distinctes de forme, suivant les valeurs assignées à n^2 . Dans tous les cas, les valeurs de ρ_1 se calculent sans difficulté et le problème s'achève comme au n° 8, puisque les coordonnées des courbes C , C_1 , C_2 s'obtiennent explicitement en fonction de ω , indépendamment de tout signe d'intégration. Nous laissons au lecteur le soin d'effectuer ce calcul, qui ne présente aucune difficulté.

11. *Intégrales premières.* — Reportons-nous à l'équation (8) du n° 4. Posons $\rho_2 = n^2 \rho$ et intégrons le premier terme par parties; le premier membre devient

$$- 2 n^2 \rho_1 \rho + 2 (n^2 - 1) \int \rho_1 d\rho,$$

et, en remplaçant ρ_1 par sa valeur donnée par la première des équations (2) sous le signe $\int$, il prend la forme suivante, lorsqu'on pratique l'intégration et qu'on représente par c_2 la constante arbitraire :

$$- 2 n^2 \rho_1 \rho - (n^2 - 1) \left(\rho^2 + \frac{d\rho^2}{d\omega^2} \right) + c^2.$$

D'après cela, l'équation (8) devient, après quelques réductions évidentes,

$$c^2 - n^2 (\rho + \rho_1)^2 = (1 - n^2) \rho_1^2 + n^2 \frac{d\rho^2}{d\omega^2} + \frac{d\rho_1^2}{\psi^2 d\omega^2};$$

on a donc finalement l'équation

$$(19) \quad \psi = \frac{\frac{d}{d\omega} \left(\rho + \frac{d^2 \rho}{d\omega^2} \right)}{\sqrt{c^2 - n^2 \left[\frac{d\rho^2}{d\omega^2} + \left(\frac{d^2 \rho}{d\omega^2} \right)^2 \right] - (1 - n^2) \left(\rho + \frac{d^2 \rho}{d\omega^2} \right)^2}},$$

qui est une équation différentielle du troisième ordre.

Si maintenant on pose, comme au n° 2, $\frac{d\rho}{d\omega} = \mu$, et qu'on multiplie les deux membres de cette équation par $2 d\mu$, on obtient l'équation transformée du second ordre

$$(19)' \quad 2 \psi d\mu = \frac{d \left(\mu^2 + \frac{d\mu^2}{d\omega^2} \right)}{\sqrt{c^2 - n^2 \left(\mu^2 + \frac{d\mu^2}{d\omega^2} \right) - (1 - n^2) \int \left(\mu + \frac{d^2 \mu}{d\omega^2} \right) d\omega}};$$

enfin, si l'on pose $\mu^2 + \frac{d\mu^2}{d\omega^2} = u^2$, cette dernière prend la forme simple

$$(19)'' \quad \psi d\mu = \frac{u du}{\sqrt{c^2 - n^2 u^2 - (1 - n^2) \int \frac{d\omega}{d\mu} u du}}.$$

12. *Application.* — Cette dernière équation s'intègre de nouveau dans le cas où l'on a la relation

$$(20) \quad \frac{d\mu}{d\omega} = \lambda = \text{const.}$$

En effet, si l'on représente par c_1^2 la constante arbitraire provenant de l'intégration du dernier terme placé sous le radical, l'équation différentielle devient

$$\lambda d\epsilon = \frac{u du}{\sqrt{c^2 + c_1^2 - \left(n^2 - \frac{n^2 - 1}{2\lambda}\right) u^2}}.$$

Si maintenant on pose $c^2 + c_1^2 = k^2$, qu'on représente par ϵ_0 la constante d'intégration et par h une nouvelle constante, on obtient l'équation

$$(21) \quad (\omega - \omega_0)^2 + \left(n^2 - \frac{n^2 - 1}{2\lambda}\right) (\epsilon - \epsilon_0)^2 = \frac{h^2}{\lambda^2},$$

ce qui prouve que la courbe appartient à la classe des lignes dont la caractéristique sphérique a pour équation entre les variables ω et ϵ l'équation d'une conique.

D'un autre côté, l'équation de condition donne

$$\frac{d}{d\omega} \left(\frac{d\rho}{d\omega} \right) = \lambda;$$

or, si l'on représente par λ_1 et λ_2 deux constantes arbitraires, et qu'on pratique deux intégrations successives, on trouve la relation

$$\rho = \frac{1}{2} \lambda \omega^2 + \lambda_1 \omega + \lambda_2,$$

de sorte que la courbe C est définie d'une manière complète par les deux équations (20) et (21), qui sont ses équations naturelles.

Il est bon de remarquer que, si n^2 était égal à l'unité, la courbe C appartiendrait à la classe des cyclides, qui sont les développées par fil de la classe des hélices (¹).

13. *Conclusion.* — L'analyse dont nous venons de faire usage pour traiter la question qui fait l'objet de ce travail est susceptible d'applications nombreuses et a un caractère de généralité suffisante pour conduire à la solution complète de questions plus difficiles que la précédente, mais non moins intéressantes. C'est ainsi que l'on résoudra sans difficulté les questions suivantes de Géométrie curviligne :

1° *Trouver les intégrales des courbes dont les développantes par le plan et les développées par le plan sont liées entre elles par cette condition que, lorsqu'on développe ces deux courbes sur les plans tangents à leurs surfaces osculatrices, on obtient deux courbes planes parallèles;*

2° *Trouver les intégrales des courbes de la classe des hélices telles que les rayons des sphères osculatrices soient dans un rapport constant avec les rayons de courbure du lieu des centres de ces sphères osculatrices;*

3° *Trouver les intégrales de la courbe C, dont le rayon de courbure est la projection, sur ce rayon, du rayon de la sphère osculatrice de la développante par le plan de la courbe C.*

Sur les méthodes d'approximation chez les anciens;

par M. L. RODET.

(Séance du 11 juillet 1879.)

J'ai besoin de faire quelques rectifications et d'ajouter quelques indications complémentaires à ma Note, présentée à la Société dans sa séance du 28 mars dernier et insérée au Tome VII du *Bulletin*, p. 98 et suiv.

(¹) Voir notre *Analyse infinitésimale des courbes dans l'espace*, p. 79.

C'était bien réellement la première fois que je rencontrais, ou, plus exactement, *remarquais* chez un auteur oriental le procédé d'approximation des racines carrés que j'ai découvert chez Al-Morouzi; mais je dois dire qu'il existe aussi chez d'autres auteurs de l'école arabe et que je ne l'y avais pas aperçu, parce qu'il n'y est pas donné aussi nettement que dans mon *Traité persan*. Je m'explique. En même temps qu'Al-Morouzi écrivait son Livre à Merv (1216), un Maure de Grenade, Ibn-al-Bannâ, enseignait les Mathématiques au Maroc (vers 1220). Dans son *Traité* intitulé le *Talkhys* ⁽¹⁾, il enseigne que

$$\text{Si } r \leq a, \text{ on doit faire } \sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a},$$

$$\text{Si } r > a, \quad , \quad \sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a + 1}.$$

Le moyen d'approximation en question lui était donc connu; mais il ne divisait le reste par « le double de la racine plus un » que dans le cas où ce reste était supérieur à la racine trouvée. Il n'eût donc jamais écrit, comme Baudhâyana,

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \epsilon,$$

puisqu'ici $r = 1$ est égal à la racine. Du reste, quand il avait fait usage de la formule en question, il savait trouver le deuxième terme correctif $\epsilon_2 = \frac{r'}{2a'}$.

Au xv^e siècle, un autre Arabe d'Espagne, Al-Qalcâdi, qui commenta les œuvres d'Ibn-al-Bannâ ⁽²⁾, établit la même distinction suivant les grandeurs relatives de la racine trouvée et du reste; seulement les formules qu'il donne dans ce cas sont

$$\text{Pour } r \leq a, \quad \sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a},$$

$$\text{Pour } r > a, \quad \sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r + 1}{2a + 2};$$

(1) Voir le *Talkhys* d'Ibn-al-Bannâ, traduit par A. Marre de Marin, dans les *Atti dell' Accademia pontificia de' Nuovi Lincei*; Rome, 1865.

(2) Voir la traduction de son *Traité d'Arithmétique*, publiée par Woepeke dans les mêmes *Atti de' Nuovi Lincei*; Rome, 1839.

enfin il obtient une approximation à deux termes correctifs en faisant

$$\sqrt{a^2 + r} = a + \frac{r}{2a} - \frac{\left(\frac{r}{2a}\right)^2}{2\left(a + \frac{r}{2a}\right)}.$$

Cette manière d'évaluer les racines carrées avait déjà fait l'objet d'une Note de Woepcke, à la suite de son exposé des notations algébriques d'Al-Qalçâdi (*Journal asiatique*, octobre-novembre 1854); mais ce procédé diffère entièrement de celui qu'a dû suivre, comme je l'ai fait voir, Baudhâyana, car il donne

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 4},$$

et non

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}.$$

C'est ici que j'ai une erreur à rectifier : j'ai cru pouvoir conclure que, de ce que le terme correctif $-\frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}$ « est trop grand en valeur absolue, la série arrêtée à ce terme est de nouveau approchée *par défaut* ». Cette affirmation, énoncée *a priori*, est fausse, ainsi qu'il est facile de le vérifier de bien des manières. D'abord convertie en une fraction unique, l'expression devient $\frac{577}{408}$, dont le carré est $\frac{332929}{166464}$; or le double du dénominateur est seulement 332928. Si l'on veut encore, $\frac{577}{408}$ est la huitième réduite de la fraction continue qui exprime $\sqrt{2}$; elle est donc, comme réduite paire, approchée par excès. Enfin, si l'on continue l'opération comme je l'ai indiqué dans ma Note précitée, on trouve

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34 \cdot 1154}.$$

Puisque j'ai eu à revenir sur ces questions d'approximation, je dois signaler une méthode applicable non-seulement à l'extraction de la racine carrée, mais à la recherche de la solution numérique d'une équation quelconque et que je crois être fort ancienne,

comme je le préciserai tout à l'heure. Elle est exposée et fréquemment appliquée dans un Ouvrage imprimé à Lyon, en 1520, sous le titre de *Larismethique de maistre Estienne de la Roche dict Villefranche natif de Lyon sus le Rosne* ⁽¹⁾, où elle est désignée par le nom de *Rigle de mediacion entre le plus et le moins*. Elle s'appuie sur ce principe, que La Roche exprime en ces termes à la suite de sa définition des fractions, ou, comme il dit, des « nombres routz » :

« Et doit on scaoir que le milieu de tous les nombres routz est $\frac{1}{2}$. Duquel naissent et saillent deux progressions naturelles desquelles lune progredist par augmentation comme $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \dots$ Et procede in infinitum ne iamais ne pourra atteindre .1. entier. Et laultre progredist par diminution comme $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \dots$ Et procede aussi in infinitum et iamais ne sera euacuee iusques a .0. quelle ne soit tousiours quelque chose.... »

Pour ne pas trop allonger cette Note, je passe à la façon dont il se sert de ses deux progressions et de sa *règle de médiation* pour extraire la racine carrée de 6. Il a d'abord fait voir que « la racine quarree de .6. est vng certain nombre moyen entre .2. et .3. Et pour icelluy trouuer lon doit vser de la regle de mediation entre le plus et le moins.... Et prendre pour le premier moyen $2 \cdot \frac{1}{2}$. Qui multiplies en soy montent $6 \cdot \frac{1}{4}$. Qui sont $\frac{1}{4}$. plus de 6. Et pourtant prandrns moins en procedant par la progression de diminution et essayerons si $2 \cdot \frac{1}{3}$. multipliez en soy montent

(1) Cet Ouvrage est cité et sa méthode d'approximation signalée, mais en passant, dans un très-remarquable travail : *Das Rechnen im 16 Jahrhundert* de M. Treutlein, professeur au Gymnase de Karlsruhe, paru dans les *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik*, premier fascicule (Leipzig, chez Teubner), 1877. La place me manque pour présenter ici une analyse de l'Ouvrage d'Estienne de la Roche; je me bornerai à en recommander vivement la lecture aux personnes qui s'intéressent à l'histoire des Mathématiques.

plus ou moins de .6. Or il est ainsi quilz montent .6. moins $\frac{5}{9}$.
 Maintenant nous auons trouue deux racines donc l'une fait plus
 et l'autre moins. Il nous conuient trouue vng nombre moyen entre
 $2\frac{1}{2}$ et $2\frac{1}{3}$ en adioustant numerateur avec numerateur et deno-
 minateur avec denominateur et en vient $2\frac{3}{5}$. Ores essaye la racine
 en multipliant $2\frac{2}{5}$ en soy. Et trouueras .6. moins $\frac{6}{25}$. Comment
 donc trouuer vng aultre nombre moyen entre $2\frac{1}{2}$ et $2\frac{2}{5}$ en
 adioustant comme dessus et lon aura $2\frac{3}{7}$ qui multipliez en soy
 montent .6. moins $\frac{5}{49}$. Et par ceste maniere peult proceder.... »

Et il termine son calcul, qu'il pousse jusqu'à $2\frac{881}{1960}$, par le
 Tableau résumé dont voici les premiers termes seulement, les
 seuls dont j'aie besoin :

Par $2\frac{1}{2}$	$\bar{p} - \frac{1}{4}$	Par $2\frac{13}{29}$	$\bar{m} - \frac{5}{841}$
» $2\frac{1}{3}$	$\bar{m} - \frac{5}{9}$	» $2\frac{22}{49}$	$\bar{m} - \frac{6}{2401}$
» $2\frac{2}{5}$	$\bar{m} - \frac{6}{25}$	» $2\frac{31}{69}$	$\bar{m} - \frac{5}{4761}$
» $2\frac{3}{7}$	$\bar{m} - \frac{5}{49}$	» $2\frac{40}{89}$	$\bar{m} - \frac{2}{7921}$
» $2\frac{4}{9}$	$\bar{m} - \frac{2}{81}$	» $2\frac{49}{109}$	$\bar{p} - \frac{3}{11881}$
» $2\frac{5}{11}$	$\bar{p} - \frac{3}{121}$	» $2\frac{89}{198}$	$p - \frac{1}{39204}$
» $2\frac{9}{20}$	$\bar{p} - \frac{1}{400}$		

Relevons dans ce Tableau les termes pour lesquels se produit
 une variation dans le sens de l'approximation, en plaçant en tête
 la valeur 2 écrite sous la forme $2 + \frac{0}{1}$; il résulte de la façon même
 dont nos nombres sont obtenus qu'ils ont, en réalité, la forme

suivante :

Par défaut :

Par excès :

$$\begin{array}{ll} 2 + \frac{0}{1}, & 2 + \frac{1}{2}, \\ 2 + \frac{4}{9} = 2 + \frac{0 + 4 \cdot 1}{1 + 4 \cdot 2}, & 2 + \frac{9}{20} = 2 + \frac{1 + 2 \cdot 4}{2 + 2 \cdot 9}, \\ 2 + \frac{40}{89} = 2 + \frac{4 + 4 \cdot 9}{9 + 4 \cdot 20}, & 2 + \frac{89}{198} = 2 + \frac{9 + 2 \cdot 40}{2 + 2 \cdot 89}. \end{array}$$

Or, si nous calculons les réduites successives de la valeur de $\sqrt{6}$ en fraction continue, nous avons

$$\begin{array}{l} \sqrt{6} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \dots}}}} \\ \frac{2}{1}, \frac{5}{2}, \frac{22}{9} = \frac{2 + 4 \cdot 5}{1 + 4 \cdot 9}, \quad \frac{49}{20} = \frac{5 + 2 \cdot 22}{2 + 2 \cdot 9}, \\ \frac{218}{89} = \frac{22 + 4 \cdot 49}{9 + 4 \cdot 20}, \quad \frac{485}{198} = \frac{49 + 2 \cdot 218}{20 + 2 \cdot 89}, \end{array}$$

c'est-à-dire que la « règle de mediation entre le plus et le moins » amène *par tâtonnement* et par un procédé fort simple, l'addition terme à terme de fractions, à *calculer toutes les réduites successives de la fraction continue exprimant le nombre que l'on cherche*.

Or, ce genre de calcul par tâtonnement a tout à fait mine égyptienne. En effet, j'ai fait remarquer dans mon analyse d'un *Manuel du Calculateur*, insérée au *Bulletin* (t. VI, p. 139), que Ahmesu, l'auteur de ce Livre curieux, pour faire une division, *faisait croître* par degrés insensibles le dividende jusqu'à obtenir un nombre égal au diviseur, c'est-à-dire cherchait par tâtonnement et approximations successives quels multiples et sous-multiples du diviseur égalaient le dividende. Mais, les Grecs ayant été sur bien des points les disciples des Égyptiens, d'autre part le procédé qu'ils suivaient pour extraire les racines carrées nous étant jusqu'ici demeuré inconnu, j'ai tout naturellement été conduit à chercher si quelques indices ne nous permettraient pas de leur attribuer l'usage, soit du

procédé d'Al-Morouzi et de Baudhâyana, soit de la « règle de mediacion » de La Roche. Voici quel a été le résultat de mes recherches.

Nous connaissons trois approximations de $\sqrt{3}$ ayant cours chez les Grecs.

Héron d'Alexandrie nous enseigne qu'on obtient la *calhète* d'un triangle équilatéral $\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ « en retranchant du côté son dixième et son trentième ». Or

$$1 - \frac{1}{10} - \frac{1}{30} = 1 - \frac{4}{30} = \frac{26}{30} = \frac{1}{2} \frac{26}{15}.$$

Donc, pour Héron, $\sqrt{3} = \frac{26}{15}$.

Archimède, dans son *Traité Περὶ κύκλου μετρήσεως*, adopte deux valeurs approchées pour $\sqrt{3}$; dans la première Partie, lorsqu'il calcule le périmètre d'un polygone circonscrit au cercle, prenant pour point de départ le triangle formé par une tangente, le diamètre au point de contact et le prolongement d'un rayon faisant avec le diamètre $\frac{1}{3}$ d'angle droit, triangle dont les côtés sont entre eux comme $1:2:\sqrt{3}$, il leur donne pour valeurs $153:306:265$, prenant ainsi $\sqrt{3} = \frac{265}{153}$ *par défaut*.

Plus loin, et pour calculer son polygone inscrit, il trace dans un demi-cercle un triangle rectangle ayant pour hypoténuse le diamètre et son grand côté faisant avec ce diamètre un angle de $\frac{1}{3}$ de droit. Cette fois, il donne aux côtés les valeurs $780:1560:1351$, faisant $\sqrt{3} = \frac{1351}{780}$ *par excès*.

Si nous n'avions que la première valeur, celle de Héron, et cette dernière, nous pourrions être tentés de croire qu'elles sont obtenues par le procédé de Baudhâyana. En effet, on verra facilement que, d'après cette méthode,

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3.5} - \frac{1}{3.5.52},$$

dont les trois premiers termes font $\frac{26}{15}$, les quatre $\frac{1351}{780}$.

Mais l'emploi de la valeur intermédiaire $\frac{265}{153}$ s'oppose à cette explication, et force nous est alors d'admettre qu'Archimède avait procédé « par mediacion entre le plus et le moins ». En effet, $\frac{265}{153}$ est la neuvième réduite de la fraction continue égale à $\sqrt{3}$, dont $\frac{26}{15}$ est la sixième et $\frac{1351}{780}$ la douzième réduite, et nous venons de voir que la « règle de mediacion » amène à trouver les réduites successives de la fraction continue. On comprend en outre pourquoi Eutocius, révisant les calculs d'Archimède, n'a eu d'autre moyen de démontrer l'exactitude des racines extraites que d'en faire le carré : c'était seulement ainsi qu'on arrivait à déterminer leur valeur.

Je crois de là pouvoir conclure que la *règle de médiation*, telle que je l'ai exposée d'après La Roche, a dû être pratiquée très-anciennement au moins par les Grecs, peut-être par les Égyptiens, et a dû pendant longtemps former la seule méthode d'approximation connue et pratiquée par les calculateurs anciens, et, à bien prendre, elle n'est pas plus mauvaise assurément que la méthode de substitution, à l'inconnue d'une équation, de nombres variant par fractions décimales, seul procédé que nous ayons d'obtenir une valeur approchée de la racine de cette équation si elle est de degré supérieur au second.

Je ne puis pas m'empêcher, malgré la longueur de cette Note, de citer, en terminant, les réflexions de Nesselmann (*Algebra der Griechen*, p. 110) au sujet de ces racines carrées d'Archimède :

« Donc, suivant toute vraisemblance, les Grecs n'avaient pas de méthode définie pour, étant donné dans le système numéral ordinaire un nombre qui n'est pas un carré parfait, en extraire la racine carrée irrationnelle. Pourtant, la méthode que Théon applique aux nombres exprimés en fractions sexagésimales pouvait, comme nous le verrons plus loin, s'appliquer également au système décimal des Grecs ; mais l'opération, pour des nombres un peu grands, serait devenue longue et difficile.... Il ne reste donc plus qu'une supposition possible : c'est que les anciens ont trouvé leurs racines par tâtonnement et divination, *ce que semblent indiquer en particulier les preuves par multiplication d'Eutocius*. Le nombre entier le

plus approché par défaut (*die zunächst kleinere ganze Zahl*) qui répondait à la racine cherchée pouvait être facilement pris dans *une Table des carrés*, et la preuve que des Tables de ce genre, destinées à faciliter leurs calculs si pénibles, ne leur étaient pas étrangères, c'est la Table de multiplication qui se trouve dans Nicomache. »

Je n'ai pu m'empêcher de citer cette nouvelle preuve du génie pénétrant de Nesselmann, qui fait regretter à chaque instant sa mort prématurée, en même temps que l'imperfection des documents qu'il avait à sa disposition, et la confiance dont il a fait preuve vis-à-vis d'éditeurs qui ne s'attendaient pas assurément à ce qu'on analysât, jusqu'à y chercher des détails aussi minutieux, la publication qu'ils faisaient dans un tout autre but du texte d'anciens auteurs. En ce qui concerne particulièrement les Tables de carrés destinées à alléger les calculs pénibles, l'hypothèse de Nesselmann a reçu, depuis l'époque où il écrivait (1842), une confirmation éclatante par la découverte de semblables Tables de carrés et de cubes sur les briques de la Bibliothèque de Sardanapale IV à Babylone. Si les Chaldéens possédaient ces Tables, *a fortiori* les Grecs, leurs disciples et leurs héritiers en plus d'un cas, devaient-ils les avoir imitées et étendues.

Sur l'extraction de la racine carrée d'un nombre;

par M. N. ALEXÉEFF.

(Séance du 25 juillet 1879.)

C'est à l'occasion de l'intéressante Communication de M. Rodet sur les moyens qu'avaient les anciens pour calculer la racine carrée d'un nombre, que j'ose exprimer mon opinion sur le même sujet. Les anciens connaissaient la moyenne arithmétique et la moyenne harmonique de deux nombres, et ils savaient aussi que la moyenne géométrique, c'est-à-dire la racine carrée du produit de ces deux nombres, se trouve entre ces deux moyennes. Ils pouvaient ainsi calculer de proche en proche la racine carrée en prenant les moyennes consécutives. Mais, n'ayant pas les maté-

riaux nécessaires pour faire valoir mon opinion, je la donne ici comme hypothèse, et, dans la Communication qui suit, je m'occupe seulement des résultats qu'on peut tirer de la méthode indiquée, pour calculer la racine carrée.

Soit à extraire la racine carrée d'un nombre N ; je décompose ce nombre en ses deux facteurs a et b ; lorsque N est premier, l'un des facteurs $a = N$ et l'autre $b = 1$. Si le nombre N n'est pas un carré parfait, on peut poser $a > b$.

La première approximation sera exprimée par deux inégalités

$$b < \sqrt{N} < a,$$

la seconde par les deux suivantes :

$$\frac{2N}{a+b} < \sqrt{N} < \frac{a+b}{2}.$$

Posons

$$\frac{a+b}{2} = a_1, \quad \frac{2N}{a+b} = b_1;$$

l'approximation suivante est

$$\frac{2N}{a_1+b_1} < \sqrt{N} < \frac{a_1+b_1}{2}.$$

Posons

$$\frac{a_1+b_1}{2} = a_2, \quad \frac{2N}{a_1+b_1} = b_2,$$

et procédons de la même manière pour calculer a_3 , b_3 , et ainsi de suite. Il est facile de voir que

$$b < b_1 < b_2 < \sqrt{N} < a_2 < a_1 < a,$$

c'est-à-dire que, à chaque opération nouvelle, on s'approche de plus en plus de la valeur de la racine. Maintenant, si l'on désigne par P_n le numérateur et par Q_n le dénominateur de la fraction a_n , on a

$$a_n = \frac{P_n}{Q_n} = \frac{\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} + \frac{NQ_{n-1}}{P_{n-1}}}{2} = \frac{P_{n-1}^2 + NQ_{n-1}^2}{2P_{n-1}Q_{n-1}}.$$

Nous pouvons poser

$$P_n = P_{n-1}^2 + NQ_{n-1}^2,$$

$$Q_n = 2P_{n-1}Q_{n-1}.$$

Ces deux équations exprimeront la loi que suivent les nombres P et Q . La différence des deux valeurs approchées a_n et b_n , que nous désignerons par D_n , est exprimée par l'équation

$$D_n = \frac{P_n}{Q_n} - \frac{NQ_n}{P_n} = \frac{P_n^2 - NQ_n^2}{P_n Q_n}.$$

Nous désignerons le numérateur de cette fraction par Δ_n ; si l'on remplace, dans l'expression de Δ_n , P_n et Q_n par leurs valeurs en P_{n-1} et Q_{n-1} , on a

$$\Delta_n = [P_{n-1}^2 - NQ_{n-1}^2]^2.$$

En continuant à abaisser les indices de P et de Q , on parviendra à cette équation :

$$\Delta_n = [P_1^2 - NQ_1^2]^{2^{n-1}}.$$

Mais $P_1 = a + b$, $Q_1 = 2$; donc

$$\Delta_n = (a - b)^{2^n}.$$

Nous aurons, pour la différence D_n ,

$$D_n = \frac{(a - b)^{2^n}}{P_n Q_n} = \frac{(a - b)^{2^n}}{2^n P_n P_{n-1} P_{n-2} \dots P_2 P_1}.$$

Quels que soient le nombre N et les deux facteurs a et b , cette différence peut devenir moindre que toute quantité donnée. En effet, on a

$$D_{n-1} = \frac{(a - b)^{2^{n-1}}}{2^{n-1} P_{n-1} P_{n-2} \dots P_2 P_1};$$

donc

$$D_n = \frac{(a - b)^{2^{n-1}}}{2 P_n} D_{n-1}.$$

Mais de l'équation $P_n^2 - NQ_n^2 = (a - b)^{2^n}$ on tire

$$\left[\frac{(a - b)^{2^{n-1}}}{P_n} \right]^2 = 1 - N \left(\frac{Q_n}{P_n} \right)^2,$$

d'où il suit que $\frac{(a - b)^{2^{n-1}}}{P_n} < 1$, c'est-à-dire

$$D_n < \frac{D_{n-1}}{2} < \frac{D_{n-2}}{4} < \frac{D_{n-3}}{6} < \dots < \frac{D_1}{2^{n-1}}, \quad \text{ou} \quad D_n < \frac{(a - b)^2}{2^{n-1}}.$$

Cette inégalité montre que la proposition avancée est vraie.

Pour les petits nombres N , tels que $N = 2, N = 3, \dots$, l'approximation sera très-grande, même pour la fraction $\frac{P_1}{Q_1}$. Pour les grands nombres, et lorsque la différence ne peut être rendue par le choix des facteurs a et b assez petite, l'approximation n'est pas si forte; néanmoins on parviendra toujours à une approximation qu'on veut avoir.

L'équation

$$P_n^2 - NQ_n^2 = (a - b)^{2n}$$

est remarquable, parce qu'elle donne les solutions entières de l'équation

$$x^2 - Ny^2 = z^2.$$

On voit que

$$x = P_n, \quad y = Q_n, \quad z = (a - b)^{2n-1}.$$

On peut remarquer que la même équation donne les solutions rationnelles de l'équation $x^2 - Ny^2 = 1$:

$$x = \frac{P_n}{(a - b)^{2n-1}}, \quad y = \frac{Q_n}{(a - b)^{2n-1}}.$$

Ces solutions deviennent entières lorsque le nombre $N = n(n+1)$.

La considération des nombres P et Q pourrait conduire à la résolution de l'équation $x^2 - Ny^2 = 1$ en nombres entiers dans d'autres cas; mais, puisque ce problème est résolu depuis longtemps, je trouve l'exposition de ces cas peu instructive.

Les recherches sur les nombres P_n et Q_n m'ont conduit aux formules suivantes, que je donne ici sans la démonstration, parce qu'elle est très-facile:

$$(1) \quad P_n = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^{2n} + (\sqrt{a} - \sqrt{b})^{2n}}{2}, \quad Q_n = \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^{2n} - (\sqrt{a} - \sqrt{b})^{2n}}{2\sqrt{N}}.$$

$$(2) \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \left(1 + \frac{a-b}{P_1}\right) \left[1 + \frac{(a-b)^2}{P_2}\right] \left[1 + \frac{(a-b)^3}{P_3}\right] \left[1 + \frac{(a-b)^4}{P_4}\right] \dots$$

Les expressions (1) peuvent être développées, et alors elles ne contiennent plus les radicaux; ainsi :

Pour $n = 1$, on a $P_1 = a + b, \quad Q_1 = 2.$

Pour $n = 2$,

$$P_2 = a^2 + b^2 + (2^2)_2 N, \quad Q_2 = 4(a + b).$$

Pour $n = 3$,

$$P_3 = a^3 + b^3 + (2^3)_3 (a^2 + b^2) N + (2^3)_4 N^2, \\ Q_3 = (2^3)_1 (a^3 + b^3) + (2^3)_3 (a + b).$$

Pour $n = 4$,

$$P_4 = a^4 + b^4 + (2^4)_2 (a^3 + b^3) N + (2^4)_4 (a^2 + b^2) N^2 \\ + (2^4)_6 (a^2 + b^2) N^3 + (2^4)_8 N^4, \\ Q_4 = (2^4)_1 (a^4 + b^4) + (2^4)_3 (a^3 + b^3) N \\ + (2^4)_5 (a^2 + b^2) N^2 + (2^4)_7 (a + b) N^3$$

et ainsi de suite.

Par la notation $(2^n)_k$, j'exprime le coefficient binomial du nombre (2^n) de l'ordre k .

Sur un procédé ancien pour la solution en nombres entiers de l'équation indéterminée $ax + by = c$; par M. L. BOUTET.

(Séance du 25 juillet 1879.)

Diophante et les Arabes, particulièrement *Al-Karkhi* (voir WOEPCKE, *Extraits du Fakhri*; Paris, 1863), ont traité une quantité considérable de problèmes indéterminés du premier degré; mais, comme le remarque Woepcke dans le travail précité (p. 19, note **), ils font disparaître immédiatement l'indétermination en donnant à l'une des deux variables une valeur arbitraire. Seulement ils n'ont pas dit comment ils choisissaient cette valeur arbitraire de façon à obtenir un nombre entier pour la seconde variable.

Estienne de la Roche, le mathématicien lyonnais à qui j'ai déjà emprunté la « Règle de mediacion entre le plus et le moins » (voir séance du 11 juillet 1879), enseigne un procédé *par routine*, qui pourrait bien encore être celui qu'ont employé les Grecs et les Arabes pour trouver cette solution « arbitraire », mais choisie. Pour ne pas allonger cette Note, je citerai seulement un exemple

numérique, supprimant l'énoncé de la règle, lequel est assez peu clair, parce que La Roche complique sa question en s'attaquant au système

$$\begin{aligned}x + y + z &= a, \\mx + ny + pz &= b\end{aligned}$$

et qu'il lui faut alors éliminer au préalable sa troisième inconnue z . Voici, du reste, son texte tel que nous le lisons au folio 28 :

« **EXEMPLE.** — Trouues troys nombres qui adioustes ensemble fassent .60. Et que multipliez le premier par .3. le second par .2. et le tiers par $\frac{1}{2}$. les trois multiplications adioustees ensemble facent .60. »

Pour éviter toute confusion entre ces deux nombres 60 et permettre aux lecteurs de mieux suivre l'opération, je vais indiquer entre parenthèses, après chaque nombre, sa signification algébrique, en me reportant aux deux équations ci-dessus.

« **RESPONSE.** — Multiplie .60.(a) par le moindre des troys nombres multipliers qui est $\frac{1}{2}$.(p) et auras .30.(ap) qui leuez de .60.(b) restent .30.($b - ap$). Puy soit soustrait celluy $\frac{1}{2}$ des aultres deux multipliers. cest ascauoir .3.(m) et .2.(n). Et restent $2 \cdot \frac{1}{2}$.($m - p$) et $1 \cdot \frac{1}{2}$.($n - p$). Ores de .30.($b - ap$) conuient faire deux parties desquelles l'une se puisse entierelement partir par $2 \cdot \frac{1}{2}$ et l'autre par $1 \cdot \frac{1}{2}$ sans quil reste aucune chose. Mais pour euter nombre rout faut tout reduire en $\frac{1}{2}$ cest ascauoir .30. qui est a partir. et $2 \cdot \frac{1}{2}$ et $1 \cdot \frac{1}{2}$ qui sont les par-teurs. Et trouueras .60. pour le nombre a partir. et .5. et .3. pour les par-teurs. »

Nous voilà donc ramenés à résoudre en nombres entiers l'équation à deux inconnues

$$5x + 3y = 60.$$

« Ores de .60. faitz deux parties telles que l'une se puisse entièrement partir par .5. et l'autre par .3. Et pour ce faire partis .60. par le maieur nombre qui est .5. et en vient .12. ou quotiens. Mais pour ce quil ne resteroit riens pour le moyen nombre il faut mettre moins de .12. ou quotiens affin quil reste quelque chose pour partir au moyen nombre. Or posons qu'on mette .11. ou quotiens. Et par ainsi il resteront .5. a partir qui ne se peuuent partir par .3. qui est le moyen nombre. Par quoy faudra mettre .10. ou quotiens. et resteront .10. a partir qui pareillement ne se peuuent partir par .3. entièrement. Et ainsi donc faudra mettre .9. ou quotiens. et resteront .15. a partir qui se peuuent bien partir par .3. et en vient .5. ou quotiens. »

Ainsi $x = 9$, $y = 5$, et, par suite, $z = 46$.

« Ou autrement de .60. qui est le nombre a partir lyeue le plus grand nombre qui est .5. tant de fois que la reste se puisse partir entièrement par .3. Et premierement lyeue .5. vgne fois de .60. et resteront .55. qui ne se peuuent partir par .3. Et pour ce lyeue deux fois .5. de .60. et resteront .50. qui pareillement ne se peuuent partir par .3. Et pour ce donc lyeues .3. fois .5. de .60. et resteront .45. qui se peuuent partir par .3. Et as ainsi diuise .60. en deux parties telles que l'une cest ascauoir .15. se peult partir entièrement par .5. et l'autre cest ascauoir .45. se peult partir entièrement par .3. »

L'auteur en conclut $x = 3$, $y = 15$, $z = 42$. Il ajoute :

« Et ainsi cest rayson et les semblables qui se font par ceste regle ont plusieurs responces et tant que lon veult. Par quoy appert que ceste regle est science de petite extime. »

Le problème n'est pas toujours possible :

« Et sil aduenoit que la dicte reste mise a part (c'est-à-dire $m - ap$ dans le problème à trois inconnues) ne se peut mettre en deux parties telles que quant on lauroit parti par le nombre de la maieur partie gardée a part ($m - p$). Que ce qui resteroit ne se pourroit partir entièrement par le nombre de la moyenne partie aussi gardée a part ($n - p$). Ce seroit signe que icelle rayson (problème) seroit impossible en nombres entiers. »

Calcul d'un déterminant; par M. H. LEMONNIER.

(Séance du 25 juillet 1879.)

Soit à calculer le déterminant

$$N = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

Si l'on remplace chaque terme de la dernière colonne par la somme des termes de la ligne dont il fait partie, il vient

$$N = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ n-1 & n & 1 & \dots & n-3 & 1 \\ n & 1 & 2 & \dots & n-2 & 1 \end{vmatrix},$$

ou, en retranchant successivement chaque colonne de la suivante jusqu'à l'avant-dernière,

$$N = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1-n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ n-1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ n & 1-n & n & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Faisant la même opération pour les lignes,

$$N = \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -n & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -n & n & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & -n & n & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -n & n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & . & \dots & 0 & -n \\ 0 & 0 & . & \dots & -n & n \\ 0 & 0 & . & -n & n & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & -n & n & \dots & 0 & 0 \\ -n & n & . & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n(n+1)}{2} n^{n-2}.$$

Soit à calculer de même

$$N_{n,p} = \begin{vmatrix} p+1 & p+2 & \dots & p+n \\ p+2 & p+3 & \dots & p+1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p+n & p+1 & \dots & p+n-1 \end{vmatrix}.$$

Les mêmes opérations donnent

$$N_{n,p} = \left[np + \frac{n(n+1)}{2} \right] \begin{vmatrix} p+1 & p+2 & \dots & p+n-1 & 1 \\ p+2 & p+3 & \dots & p+n & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & . \\ p+n & p+1 & \dots & p+n-2 & 1 \end{vmatrix}$$

ou

$$\left[np + \frac{n(n+1)}{2} \right] \begin{vmatrix} p+1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ p+2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & . & . & \dots & 1-n & 1 \\ \dots & . & . & \dots & \dots & . \\ p+n-1 & 1 & 1-n & \dots & 1 & 1 \\ p+n & 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

ou

$$\left[np + \frac{n(n+1)}{2} \right] \begin{vmatrix} p+1 & 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & -n & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -n & n & 0 \\ . & . & . & . & \dots & \dots & . & . \\ 1 & 0 & -n & n & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -n & n & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left[np + \frac{n(n+1)}{2} \right] n^{n-2}.$$

On déduit de là

$$\begin{vmatrix} p+q & p+2q & \dots & p+nq \\ p+2q & p+3q & \dots & p+q \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p+nq & p+q & \dots & p+(n-1)q \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} q^n \left[n \frac{p}{q} + \frac{n(n+1)}{2} \right] n^{n-2}.$$

Sur les faisceaux ponctuels plans de caractéristique ν , ayant un point principal multiple d'ordre ν ; par M. G. FOURET.

(Séance du 27 juin 1879.)

I. — Généralités.

1. Avant d'aborder la question qui fait l'objet spécial de cette Note, je crois devoir rappeler quelques notions que j'ai déjà exposées antérieurement. Dans un précédent Mémoire ⁽¹⁾, j'ai donné la forme générale de l'équation différentielle du premier ordre à deux variables, qui définit un système de courbes planes satisfaisant à cette double condition, qu'il y ait un nombre déterminé μ de branches du système passant par un point quelconque du plan, et un nombre également déterminé ν de ces branches tangentes à une droite prise arbitrairement.

L'équation différentielle la plus générale d'un pareil système peut s'écrire

$$(1) \left\{ \begin{aligned} & R \left(x \frac{dy}{dx} - y \right)^\mu + \left(S_0 \frac{dy}{dx} + S_1 \right) \left(x \frac{dy}{dx} - y \right)^{\mu-1} + \dots \\ & + \left[V_0 \left(\frac{dy}{dx} \right)^{\mu-1} + V_1 \left(\frac{dy}{dx} \right)^{\mu-2} + \dots + V_{\mu-1} \right] \left(x \frac{dy}{dx} - y \right) \\ & + P_0 \left(\frac{dy}{dx} \right)^\mu + P_1 \left(\frac{dy}{dx} \right)^{\mu-1} + \dots + P_\mu = 0, \end{aligned} \right.$$

en désignant par les lettres R, S, ..., V des polynômes homogènes

⁽¹⁾ Mémoire sur les systèmes généraux de courbes planes, etc. (Bulletin, t. II, année 1874, p. 72).

de degré ν en x et y , et par les lettres P des polynômes *complets* également de degré ν en x et y .

Les deux nombres μ et ν caractérisent l'équation différentielle, de la même manière qu'une équation algébrique ordinaire est caractérisée par son degré. Ils peuvent servir de base à une classification rationnelle des équations différentielles du premier ordre à deux variables.

2. Les cas où l'une des deux caractéristiques est égale à l'unité présentent des particularités intéressantes. Si l'on suppose, par exemple, $\mu = 1$, l'équation (1) devient

$$(2) \quad L \left(x \frac{dy}{dx} - y \right) - M \frac{dy}{dx} + N = 0,$$

dans laquelle L , M et N désignent des polynômes de degré ν en x et y , dont le premier est réduit à ses termes du plus haut degré, les deux autres étant complets.

On voit immédiatement sur l'équation (2) qu'il existe dans le plan un certain nombre de points pour lesquels la valeur de $\frac{dy}{dx}$ est indéterminée. Ils sont fournis par l'intersection des deux courbes

$$(3) \quad Lx - M = 0, \quad Ly - N = 0.$$

Ces courbes, toutes les deux de degré $\nu + 1$, ont $(\nu + 1)^2$ points communs, dont ν sont à l'infini sur les ν directions données par l'équation

$$L = 0;$$

mais il est facile de voir que, pour ces ν points à l'infini, l'indétermination de $\frac{dy}{dx}$ n'est qu'apparente : en effet, pour avoir d'une manière générale la valeur de $\frac{dy}{dx}$ correspondant à un système de valeurs infinies de x et de y , on a le droit de négliger dans l'équation (2) les termes de degré supérieur à $\nu + 1$ par rapport à x et y , c'est-à-dire tous les termes des polynômes M et N , et l'on obtient alors

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Le nombre des points pour lesquels $\frac{dy}{dx}$ est indéterminé se réduit donc à $(\nu + 1)^2 - \nu = \nu^2 + \nu + 1$. De là le théorème suivant :

Dans un système général $(1, \nu)$ de courbes planes, il existe $\nu^2 + \nu + 1$ points, en chacun desquels la direction tangentielle est indéterminée ⁽¹⁾.

3. Ces points pourront être, dans certains cas, des points de croisement de toutes les courbes du système. Ils comprendront également les points multiples et singuliers de ces courbes, si elles en possèdent; car, pour ces points, $\frac{dy}{dx}$ a évidemment plus d'une valeur, et, par suite, son expression doit se présenter sous la forme $\frac{0}{0}$. Mais il est facile de démontrer qu'en général un point, pour lequel $\frac{dy}{dx}$ est indéterminé, est un *point asymptotique*

En effet, prenons l'un de ces points O pour origine des coordonnées; en résolvant l'équation (1) par rapport à $\frac{dy}{dx}$, on en tire une expression telle que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + cx^2 + \dots}{a'x + b'y + c'x^2 + \dots}.$$

Si x et y sont les coordonnées d'un point m infiniment voisin de l'origine, les termes de degré supérieur en x et y deviennent des infiniment petits négligeables, et l'expression de $\frac{dy}{dx}$ se réduit à

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{a'x + b'y};$$

⁽¹⁾ J'ai déjà énoncé antérieurement ce théorème dans une Note *Sur les points fondamentaux du faisceau de courbes planes défini par une équation différentielle du premier ordre algébrique* (Comptes rendus de l'Académie des Sciences, t. LXXXVI, p. 586). Voir également le Mémoire déjà cité de M. Darboux (*loc. cit.*, p. 82). Ce théorème n'est d'ailleurs, sous une forme un peu différente, que le corrélatif d'un théorème sur les connexes [LINDEMANN, *Vorlesungen über Geometrie von Alfred Clebsch* (Ersten Bandes, zweiter Theil, p. 1001)].

on en déduit

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = \frac{a + (b - a')\frac{y}{x} - b'\left(\frac{y}{x}\right)^2}{a'x + b'y},$$

ou bien, en désignant par α l'inclinaison sur Ox de la tangente à la branche de courbe qui passe en m ,

$$(4) \quad \widehat{\text{tang} \alpha - \text{tang } mOx} = \frac{a + (b - a')\frac{y}{x} - b'\left(\frac{y}{x}\right)^2}{a'x + b'y}.$$

Or, dans le cas où la branche considérée passerait effectivement par le point O , les angles α et $\widehat{mOx}$ différeraient d'un infiniment petit, et il en serait de même de leurs tangentes. C'est précisément, comme le montre la relation (4), ce qui n'a pas lieu en général, c'est-à-dire lorsque les coefficients a, b, a', b' sont quelconques et indépendants les uns des autres. Le point O et les points analogues sont donc bien généralement des *points asymptotiques*.

On peut remarquer toutefois qu'il existe pour chacun de ces points deux branches réelles ou imaginaires qui y passent effectivement : on obtient les directions tangentielles de ces branches, en égalant à zéro le numérateur du second membre de la relation (4). Cette dernière remarque a déjà été faite par M. Darboux, dans son *Mémoire sur les équations différentielles algébriques du premier ordre et du premier degré* ⁽¹⁾. L'étude des singularités de ces points ayant été traitée par ce savant géomètre, nous n'y insisterons pas davantage : notre seul but était d'établir que ces points sont, en général, des points asymptotiques, fait que nous avons déjà signalé précédemment, mais sans le démontrer ⁽²⁾.

4. Parmi les systèmes définis par une équation telle que (2), se trouvent évidemment compris les faisceaux de courbes algébriques planes, puisque, comme on le sait, par un point quelconque du plan il passe une courbe d'un pareil faisceau, et une seule. Considérons un faisceau de courbes du $m^{\text{ième}}$ ordre, assujetties à la

⁽¹⁾ *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, 2^e série, t. II, p. 124.

⁽²⁾ *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXXVI, p. 583.

condition de passer par $\frac{m(m+3)}{2} - 1$ points donnés, et ayant par suite m^2 points communs appelés *points fondamentaux* du faisceau. On sait, d'après un théorème bien connu, qu'il existe $2(m-1)$ courbes de ce faisceau tangentes à une droite quelconque du plan; on a, par suite,

$$\nu = 2(m-1).$$

Le nombre des points, pour lesquels le $\frac{dy}{dx}$ de l'équation différentielle du faisceau est indéterminé, est par suite égal à

$$4(m-1)^2 + 2(m-1) + 1 = 4m^2 - 6m + 3.$$

Si de ce nombre nous déduisons les m^2 points fondamentaux qui s'y trouvent compris, le nombre restant $3m^2 - 6m + 3 = 3(m-1)^2$ sera manifestement celui des points doubles des courbes du faisceau. On retrouve ainsi un résultat connu.

5. Par une extension qui paraîtra toute naturelle, nous disons que les courbes, en général transcendantes, définies par l'équation (2), forment un *faisceau ponctuel*, ou, plus simplement, un *faisceau*, de caractéristique ν . Nous donnerons aussi un nom aux $\nu^2 + \nu + 1$ points, pour lesquels le $\frac{dy}{dx}$ de l'équation (2) est indéterminé : nous les appellerons les *points principaux* du faisceau. Cette dénomination nous semble préférable à celle de *points fondamentaux* que nous avons employée dans une Note précédente ⁽¹⁾, parce que, dans le cas des faisceaux de courbes algébriques, comme on l'a vu plus haut, les points en question comprennent, outre les points qu'on a l'habitude d'appeler *fondamentaux*, les points doubles et en général tous les points singuliers des courbes du faisceau. C'est pour une raison analogue que nous éviterons de nous servir de l'expression de *points singuliers*, par laquelle M. Darboux désigne ces points. Il nous paraît plus rationnel de réserver la qualification de *singuliers*, pour les points principaux résultant de la coïncidence de deux ou plusieurs points princi-

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXXVI, p. 585.

paux ordinaires. En adoptant ces dénominations, on peut énoncer le théorème suivant :

THÉOREME. — *Dans le plan d'un faisceau ponctuel de courbes planes, de caractéristique ν , il existe $\nu^2 + \nu + 1$ points, en chacun desquels la direction tangentielle est indéterminée. Ces points sont, en général, des points asymptotiques communs à toutes les courbes du faisceau, et, dans certains cas, des points de croisement de ces courbes. Ils comprennent les points singuliers de ces mêmes courbes, quand il en existe.*

II. — Faisceaux à point principal multiple.

6. Points principaux multiples et singuliers. — Il peut arriver, dans certains cas, que deux ou plusieurs points principaux se superposent. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit évidemment que les courbes (3) aient en commun un point qui soit multiple au moins pour l'une d'elles. Si les deux courbes (3) ont un point d'intersection multiple d'ordre h pour l'une, d'ordre k pour l'autre, ce point sera, comme on le voit immédiatement, un point principal multiple d'ordre hk du faisceau.

Considérons maintenant la courbe lieu des points de contact des tangentes menées par un point fixe I à toutes les courbes du faisceau. On forme immédiatement l'équation de ce lieu, que nous avons déjà eu l'occasion de considérer dans une Note précédente ⁽¹⁾, sous le nom d'*indicatrice-point* du système ou du faisceau. Il suffit de remplacer dans l'équation différentielle (2) $\frac{dy}{dx}$ par $\frac{y-\beta}{x-\alpha}$, α et β désignant respectivement l' x et l' y du point I .

On obtient ainsi l'équation

$$(5) \quad L(\beta x - \alpha y) + M y - N x - M \beta + N \alpha = 0.$$

Cette équation est de degré $\nu + 1$; elle est vérifiée pour $x = \alpha, y = \beta$, et pour les coordonnées de chacun des points fondamentaux. Si, en outre, on suppose que les deux courbes (3) aient en commun un point multiple, d'ordre k pour chacune d'elles, et que ce point ait été pris pour origine des coordonnées, les termes de degré inférieur

⁽¹⁾ Bulletin de la Société mathématique, t. V, p. 130.

à k manqueront à la fois dans M et dans N , et, par suite, dans l'équation (5) : d'où l'on conclut que l'indicatrice-point a pour point multiple d'ordre k le point principal multiple d'ordre k^2 , qui coïncide avec l'origine des coordonnées. On peut, par suite, énoncer le théorème suivant :

Le lieu des points de contact des tangentes, menées par un point fixe I , à toutes les courbes d'un faisceau de caractéristique ν , est une courbe d'ordre $\nu + 1$, qui passe par le point I , et par les points principaux du faisceau. Un point principal multiple d'ordre k^2 est un point multiple d'ordre k du lieu (¹).

On peut remarquer que les diverses singularités que pourra présenter un point principal multiple seront dans une corrélation intime avec les singularités de ce même point considéré comme appartenant à une indicatrice-point quelconque. Parmi ces indicatrices, il suffira même de considérer celles qui correspondent à des points I situés à l'infini.

7. Soit maintenant une droite D quelconque. En chacun des points de cette droite passe une courbe du faisceau et une seule. Menons la tangente en ce point à la courbe qui y passe : l'enveloppe de ces tangentes est une courbe de classe $\nu + 1$, ayant pour tangente multiple d'ordre ν la droite D . Cela résulte immédiatement de ce que par chaque point de D ne passe qu'une de ces tangentes, et qu'il existe ν branches tangentes à D . On peut aussi faire voir que par un point quelconque I du plan on ne peut mener que $\nu + 1$ tangentes à l'enveloppe considérée. En effet, l'indicatrice-point relative au point I , qui est de degré $\nu + 1$, coupe la droite D en $\nu + 1$ points qui sont tels, que les tangentes en ces points, aux courbes du faisceau qui y passent, concourent en I . Nous avons déjà appelé précédemment l'enveloppe considérée l'*indicatrice-droite* relative à D .

Supposons maintenant que la droite D , au lieu d'être quelconque, passe par un point principal O du faisceau, multiple d'ordre k^2 . Alors l'indicatrice-point relative au point I a un point

(¹) On démontre encore facilement que le degré du même lieu se réduit à $\nu - k + 1$, lorsque le point I coïncide avec un point principal multiple d'ordre k^2 .

multiple d'ordre k en O ; elle ne rencontre plus la droite D qu'en $\nu - k + 1$ points en dehors de O . L'indicatrice-droite relative à D n'est plus, par suite, que d'une classe égale à $\nu - k + 1$, et la droite D n'est plus tangente multiple que de l'ordre $\nu - k$. On a donc le résultat suivant :

L'enveloppe des tangentes, aux divers points d'une droite D , aux branches d'un faisceau de caractéristique ν qui passent par ces points, est une courbe de classe $\nu + 1$, qui admet pour tangente multiple d'ordre ν la droite D .

Dans le cas où D passe par un point principal multiple d'ordre k^2 , la classe de l'enveloppe se réduit à $\nu - k + 1$, et la droite D n'est plus qu'une tangente multiple d'ordre $\nu - k$.

Si l'on suppose, en particulier, que k soit égal à ν , la classe de l'indicatrice-droite, relative à une droite passant par un point principal multiple d'ordre ν^2 , est égale à l'unité, c'est-à-dire que cette indicatrice se réduit à un point. De là ce théorème :

THÉORÈME. — *Lorsqu'un faisceau de caractéristique ν possède un point principal multiple d'ordre ν^2 , toute droite passant par ce point est telle, que les tangentes aux courbes du faisceau, aux points où elles rencontrent la droite, concourent en un même point.*

8. Nous allons démontrer cette dernière propriété directement par le calcul.

A cet effet, prenons pour origine des coordonnées le point multiple d'ordre ν ; d'après une remarque faite précédemment (6), les polynômes M et N ne contiendront que des termes de degré ν , de même que L .

En posant

$$(6) \quad y = tx,$$

on peut, par suite, écrire

$$(7) \quad L = Ax^\nu, \quad M = Bx^\nu, \quad N = Cx^\nu,$$

A, B, C désignant des fonctions entières, de degré ν , de t .

L'équation (2), après ces substitutions, devient

$$(8) \quad Ax \left(\frac{dy}{dx} - t \right) - B \frac{dy}{dx} + C = 0.$$

D'autre part, l'équation de la tangente, en un point quelconque (x, y) , à la courbe du faisceau qui y passe, est

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x).$$

Si nous supposons que le point (x, y) soit pris sur la droite (6), nous pouvons remplacer dans l'équation précédente y et $\frac{dy}{dx}$ par leurs valeurs tirées de (6) et (8). L'équation de la tangente se met alors sous la forme

$$(9) \quad (Atx - C)X - (Ax - B)Y - x(Bt - C) = 0.$$

Cette équation contient un paramètre variable x , au premier degré : d'où l'on conclut que la droite qu'elle représente passe par un point fixe, ce qui est le résultat déjà trouvé géométriquement.

On voit de plus que ce point est à l'intersection des deux droites

$$Y = \frac{C}{B}X,$$

$$Y = tX + \frac{C - Bt}{A},$$

qui s'obtiennent, en faisant successivement dans (8) $x = 0$ et $x = \infty$. L'une d'elles passe par le point principal multiple; l'autre est parallèle à la droite (6).

9. La réciproque est vraie; c'est-à-dire que, si un point O du plan d'un faisceau de caractéristique v est tel, que pour toute droite passant par O les tangentes aux courbes du faisceau, en leurs points d'intersection avec cette droite, concourent en un même point, le point O est un point principal multiple d'ordre v^2 pour le faisceau.

En effet, recommençons le calcul fait plus haut (8), mais sans remplacer cette fois dans (2) L , M et N par les expressions (7) : l'équation (9) de la tangente en un point quelconque de la droite (6) devient alors

$$(10) \quad (Ltx - N)X - (Lx - M)Y - x(Mt - N) = 0.$$

Il est clair que, si M et N contiennent des termes de degré supérieur à ν , x^ν ne se trouvera pas en facteur quand on substituera $y = tx$; par conséquent, x n'entrera plus linéairement dans l'équation (10) de la tangente, et il ne sera plus vrai de dire que les tangentes aux divers points de la droite (6) concourent en un même point. Pour que ce fait ait lieu, il faudra que M et N se réduisent aux termes de degré ν en x et y , ce qui est la condition nécessaire et suffisante pour que l'origine des coordonnées soit un point principal multiple d'ordre ν^2 (6).

10. Des deux théorèmes, réciproques l'un de l'autre, que nous venons de démontrer (8 et 9), on déduit une conséquence intéressante qui est la suivante.

Imaginons que l'on définisse une courbe par une propriété de sa tangente, et que cette propriété soit de telle nature que : 1° *par un point M quelconque du plan on ne puisse faire passer qu'une droite satisfaisant aux conditions imposées à la tangente*; 2° *lorsque le point M se déplace sur une droite passant par un certain point fixe O, la tangente en M converge en un point I dont la position dépende uniquement de OM*.

D'après la première condition, on voit que *la courbe cherchée fait partie d'un faisceau, c'est-à-dire qu'elle a une équation différentielle du premier degré par rapport à $\frac{dy}{dx}$* . La seconde condition indique en outre que, *si l'on prend le point O pour origine des coordonnées, les polynômes M et N, ainsi que L, de l'équation différentielle mise sous la forme (2), seront homogènes en x et y*.

Il y a plus : non-seulement on peut ainsi, prévoir d'avance la forme de l'équation différentielle résolvant le problème, mais on peut encore affirmer que l'intégration de cette équation se ramène aux quadratures. Cette intégration se conclut, en effet, par une généralisation immédiate, de la méthode donnée par M. Darboux, pour le cas particulier de $\nu = 2$, dans le beau Mémoire (1) que nous avons déjà eu l'occasion de citer. Il n'y a qu'à suivre la même marche; pour cela, rendons l'équation (2) homogène; en rempla-

(1) *Loc. cit.*, p. 124.

çant x et y respectivement par $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$; l'équation (2) devient

$$L(xy - ydx) + M(ydz - zdy) + N(zdx - xdz) = 0,$$

L , M et N restant des polynômes homogènes en x et y seulement. Faisons maintenant $y = 1$, et par suite $dy = 0$; l'équation précédente peut alors s'écrire

$$(M - Nx) \frac{dz}{dx} + Nz - L = 0.$$

C'est, comme on le voit, une équation différentielle linéaire par rapport à z , dont on sait ramener immédiatement l'intégration aux quadratures.

III. — Applications.

11. Nous allons donner quelques exemples de courbes définies par une propriété de leur tangente, de telle nature que la tangente en un point M d'une pareille courbe passe par un point I dépendant uniquement de la direction du rayon vecteur OM , qui joint un point O fixe au point M .

PROBLÈME I. — *On donne dans un plan une conique et un point fixe O , et l'on demande de trouver une courbe, telle que la tangente en un point quelconque M de cette courbe passe par le pôle I de OM par rapport à la conique.*

Il est tout d'abord facile de voir que la solution comporte une infinité de courbes formant un faisceau; cela résulte de ce que par chaque point M il ne passe qu'une seule transversale OM , laquelle n'a qu'un pôle I par rapport à la conique fixe donnée; d'où il suit que la droite MI est unique pour chaque point M . D'autre part, la position du point I ne variant pas lorsque le point M se déplace sur la transversale, on en conclut que le système admet en O un point principal multiple d'un ordre égal à sa caractéristique ν .

Cherchons quelle sera la valeur de cette caractéristique ν , c'est-à-dire du degré des polynômes L , M , N , dans l'équation différentielle. A cet effet, remarquons d'abord que, quand on fait tourner la transversale OM , le point I décrit la polaire Ω du point O par

rapport à la conique donnée. Cela posé, considérons une droite Δ quelconque, et cherchons combien il y aura de branches de courbes, satisfaisant à la question, tangentes à cette droite. Les points de contact cherchés sont évidemment sur la transversale, ou les transversales, partant du point O , qui correspondent au point I d'intersection de Δ et de Ω ; or, d'après la définition donnée plus haut, il n'y a qu'une transversale répondant à la question : c'est la polaire du point I par rapport à la conique. Les courbes cherchées ne toucheront par suite Δ qu'en un point, intersection de cette droite avec la transversale ainsi déterminée. De là nous concluons que les polynômes L , M et N seront du premier degré, c'est-à-dire que l'équation différentielle sera un cas particulier de l'équation de Jacobi.

12. On sait que, dans le cas actuellement considéré, le système de courbes défini par l'équation différentielle admet trois points principaux : l'un de ces points est le point O ; les deux autres sont les points de contact A et B des tangentes menées du point O à la conique donnée. Cela résulte de ce que, le pôle I de la transversale OA par rapport à la conique coïncidant avec le point A , la tangente en A de la courbe du système qui y passe est indéterminée; de même pour B .

En intégrant l'équation différentielle, on trouverait comme résultat le faisceau des coniques bitangentes à la conique proposée aux points A et B . On peut d'ailleurs le prévoir géométriquement, en vertu d'une propriété bien connue : en effet, considérons une transversale quelconque OM et le point I correspondant : on sait que OI est conjuguée harmonique de OM par rapport à OA et OB , c'est-à-dire que la droite OM a le même pôle I par rapport aux diverses coniques bitangentes, en A et B , à OA et OB . Donc, etc.

13. PROBLÈME II. — *Étant données dans un plan quatre droites fixes A , B , C , D et un point fixe O , on joint ce point à un point M pris arbitrairement, et l'on décrit une conique tangente aux cinq droites A , B , C , D et OM : on demande de trouver un système de courbes tel, que la tangente en M à la courbe qui y passe aboutisse au centre I de la conique.*

Nous pouvons tout d'abord remarquer qu'à un point M choisi à

volonté il ne correspond qu'une conique, à savoir la conique tangente aux cinq droites A, B, C, D et OM, et, par suite, qu'un seul point I, qui est le centre de cette conique. On ne peut donc tracer en M qu'une tangente : d'où nous concluons que le système est un faisceau. De plus, le point I restant invariable, quand le point M se déplace sur la droite OM, le point O est un point principal multiple d'un ordre égal à la caractéristique ν du faisceau.

On peut déterminer cette caractéristique géométriquement. Pour cela, cherchons en combien de points les courbes du système touchent une droite quelconque Δ : remarquons qu'en vertu d'un théorème bien connu le lieu des points I correspondant aux différentes droites partant du point O est une droite Λ , puisque c'est le lieu des centres des coniques tangentes aux quatre droites A, B, C, D. Soit I le point d'intersection de Δ et de Λ : décrivons la conique tangente à A, B, C, D et ayant pour centre le point I, laquelle est unique, comme on le sait; puis, du point O menons les deux tangentes à cette conique. Les points cherchés doivent se trouver à l'intersection de Δ avec ces deux tangentes : d'où nous concluons que l'on a $\nu = 2$.

14. Le point O étant un point principal multiple d'un ordre de multiplicité égal à $\nu^2 = 4$, il doit exister $\nu + 1 = 3$ autres points principaux. Ce sont les positions du point I, situées respectivement sur les transversales OM auxquelles elles correspondent; mais chacun des points I est le centre d'une conique tangente à A, B, C, D et à OM; par suite, pour que la circonstance indiquée soit réalisée, il faut que OM soit une asymptote de la conique. Or, considérons le lieu des points de contact des tangentes menées du point O à toutes les coniques tangentes aux droites A, B, C, D : ce lieu est une courbe du troisième ordre ayant un point double en O, car il existe une de ces coniques et une seule tangente à une droite quelconque issue du point O, et il y a deux de ces coniques qui passent en ce point. Cela posé, on aura évidemment les trois droites cherchées, en prenant les parallèles menées par O aux trois directions asymptotiques de la courbe du troisième ordre considérée.

On voit, d'après ce qui précède, que la détermination des trois points principaux dépendrait d'une équation du troisième degré.

Dans l'exemple qui va suivre, et pour lequel on a encore $v = 2$, il existe trois points principaux simples qui se construisent avec la règle et le compas.

15. PROBLÈME III. — *On donne deux droites A et B se coupant en un point d, et trois points fixes O, g et h; par le point O on mène une transversale aboutissant à un point M pris arbitrairement; cette transversale rencontre respectivement en a et b les deux droites A et B; on joint a et g, ainsi que b et h: les deux droites obtenues se coupent en un point I. On demande d'étudier le système de courbes défini par la condition que la tangente en M à la courbe qui y passe converge au point I.*

On voit d'abord immédiatement, en répétant le raisonnement déjà fait pour les deux exemples précédents, que le système en question est un faisceau, ayant en O un point principal multiple d'un ordre égal à v^2 , v étant la caractéristique de ce faisceau.

Pour trouver cette caractéristique, remarquons que le lieu du point I, pour les diverses positions de OM, est une conique qui passe par les trois points d, g, h . En effet, la transversale OM détermine sur A et B deux divisions homographiques: par suite, ga et hb sont les rayons homologues de deux faisceaux homographiques, et leur intersection I, d'après une propriété bien connue, décrit une conique (C) contenant les points g et h . Cette conique passe en outre par le point d ; en effet, lorsque la transversale coïncide avec Od, les deux points a et b se confondent en d , et il en est par suite de même du point I.

16. Cela posé, cherchons en combien de points une droite quelconque Δ est tangente à des courbes du faisceau. Cette droite Δ coupe la conique (C) en deux points I: chacun de ces points I détermine une transversale OM et une seule, que l'on obtient en joignant les points a et b , où les droites Ig et Ih rencontrent respectivement A et B. Les points d'intersection de Δ avec les deux transversales ainsi construites sont les seuls points en lesquels Δ soit tangente à des courbes du faisceau. Donc on a $v = 2$.

Le faisceau admettant sept points principaux, et le point O,

d'après ce que nous avons vu plus haut, comptant pour quatre, il doit exister trois autres points principaux. L'un de ces points est évidemment le point d , ce point coïncidant avec le point I , lorsque la transversale OM se confond avec Od . Les deux autres points principaux sont les points e et f , où Og et Oh rencontrent respectivement les droites B et A . En effet, considérons par exemple la transversale Og qui coupe A et B respectivement aux points α et α' : le point I correspondant est donné par l'intersection de $g\alpha$ et de he ; mais, $g\alpha$ se confondant avec la transversale, son point d'intersection avec he n'est autre que le point e : le point e est donc une position du point I pour laquelle ce point se trouve sur la transversale correspondante : c'est donc un point principal. Le même raisonnement s'applique au point f .

17. PROBLÈME IV. — *Étant donné un point O fixe et une courbe (C) d'ordre p , ayant un point multiple K d'ordre $p-1$, on joint le point O à un point quelconque M , puis du point K on abaisse une perpendiculaire sur OM qui rencontre la courbe (C) en un nouveau point I . On demande d'étudier le système de courbes tel, que la tangente en M , à la courbe qui y passe, aboutisse au point I .*

On voit tout de suite que le système qui vient d'être défini est un faisceau, ayant un point principal multiple, d'un ordre égal à ν^2 , ν désignant la caractéristique du faisceau.

Pour avoir cette caractéristique ν , c'est-à-dire le nombre des points de contact des courbes du faisceau avec une droite quelconque Δ , considérons les p points I d'intersection de cette droite avec la courbe (C) ; joignons ces points au point K , et abaissons de O des perpendiculaires sur les droites ainsi obtenues : on a de la sorte p transversales OM , à chacune desquelles correspond un des p points I d'intersection de Δ et de (C) : les points de rencontre de ces transversales avec Δ sont les points en lesquels Δ est tangente à des courbes du faisceau : d'où l'on conclut $\nu = p$.

18. Le point O étant, d'après ce que l'on a vu, un point principal multiple d'ordre p^2 , et le nombre total des points principaux étant égal à $p^2 + p + 1$ (§), il reste $p + 1$ points principaux à dé-

terminer. Ces points, comme dans les exemples précédents, sont les positions du point I situées respectivement sur les transversales OM qui leur correspondent : ils doivent, par suite, coïncider avec les pieds des perpendiculaires abaissées de K sur lesdites transversales. Or, les pieds de ces perpendiculaires sont situés sur le cercle décrit sur OK comme diamètre. Les points principaux cherchés devant se trouver à la fois sur ce cercle et sur la courbe (C) sont situés à l'intersection de ces deux lignes. Le nombre total de ces points d'intersection est $2p$; mais il y en a $p - 1$ qui sont confondus avec K, et qui ne satisfont pas à la condition voulue pour être des points principaux; les points restants, au nombre de $p + 1$, sont les points principaux cherchés.

19. Appliquons les résultats précédents au cas où la courbe (C) se réduit à une droite D. L'énoncé du problème devient alors le suivant :

Étant donnés deux points fixes O et K, et une droite fixe D, on joint le point O à un point quelconque M, puis du point K on abaisse une perpendiculaire sur OM qui rencontre la droite D en un point I. On demande quel est le système de courbes tel, que la tangente en M, à la courbe qui y passe, aboutisse au point I.

Nous savons immédiatement que les courbes ainsi définies forment un faisceau dont la caractéristique ν est égale à l'unité, et que les trois points principaux simples de ce faisceau sont le point O et les deux points d'intersection de D avec le cercle décrit sur OK comme diamètre. Il résulte de là que l'équation différentielle du système est un cas particulier de l'équation de Jacobi; nous allons l'intégrer par la méthode géométrique, que nous avons donnée il y a quelques années, pour ce genre d'équations (¹).

20. Formons l'équation différentielle du problème en prenant pour origine des coordonnées le point O, et pour axes deux droites rectangulaires dont l'une, l'axe des y , soit parallèle à la droite D. Soient

$$(11) \quad X = h$$

(¹) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXVIII, p. 1693 et 1837.

l'équation de la droite D, α et β les coordonnées du point K. Désignons par x, y les coordonnées du point M, et par X, Y les coordonnées courantes. L'équation de la perpendiculaire à OM menée par le point K est

$$(12) \quad Y - \beta = -\frac{x}{y} (X - \alpha).$$

Les équations (11) et (12) fournissent immédiatement les coordonnées du point I, qui sont

$$\begin{aligned} X &= h, \\ Y &= \beta - \frac{x}{y} (h - \alpha). \end{aligned}$$

Écrivons que le coefficient angulaire $\frac{dy}{dx}$ de la courbe du faisceau qui passe par le point M est égal au coefficient angulaire de MI; on obtient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - \beta + \frac{x}{y} (h - \alpha)}{x - h},$$

ou bien

$$(13) \quad y(xdy - ydx) + [(\alpha - h)x + \beta y]dx - h y dy = 0.$$

Telle est l'équation différentielle des courbes cherchées. Nous pouvons, au moyen de cette équation, retrouver les points principaux du faisceau. Ces points sont fournis par les systèmes de valeurs de x et y qui vérifient les équations

$$(14) \quad \begin{cases} xy - hy = 0; \\ y^2 - (\alpha - h)x - \beta y = 0. \end{cases}$$

La première équation se dédouble en $y = 0$ et $x = h$. En faisant $y = 0$ dans la seconde, on obtient $x = 0$; on retrouve ainsi comme point principal le point O. Pour $x = h$, la seconde équation devient une équation du deuxième degré en y , et détermine deux autres points principaux situés sur D. On voit, d'ailleurs, immédiatement que ces points sont situés sur la courbe

$$x^2 + y^2 - \alpha x - \beta y = 0,$$

qui n'est autre que le cercle décrit sur OK comme diamètre. C'est le résultat déjà trouvé géométriquement.

21. Cela posé, si nous appelons

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0$$

les équations des droites EF, OF, OE, qui joignent deux à deux les trois points principaux, et si nous désignons par ρ le rapport anharmonique constant $\frac{\sin \text{IME}}{\sin \text{IMF}} : \frac{\sin \text{OME}}{\sin \text{OMF}}$, l'intégrale générale de l'équation (13) peut s'écrire

$$(15) \quad u^{1-\rho} v^{\rho} w^{-1} = C,$$

C désignant une constante arbitraire ⁽¹⁾.

La droite $u = 0$ n'est autre que $x - h = 0$. Pour avoir les équations des deux autres, retranchons membre à membre les équations (14), après les avoir multipliées respectivement par x et par y : on obtient

$$(\alpha - h)x^2 + \beta xy - hy^2 = 0,$$

équation du système des deux droites OE et OF. Les coefficients angulaires de ces deux droites sont, en conséquence, donnés par l'équation

$$hm^2 - \beta m - (\alpha - h) = 0,$$

d'où

$$m = \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 + 4\alpha h + 4h^2}}{2h}.$$

En désignant par m' et m'' ces deux coefficients angulaires, nous pouvons écrire les équations des deux droites OE et OF

$$y - m'x = 0, \quad y - m''x = 0.$$

Il ne reste plus qu'à déterminer ρ . Or, soient N et Q les points d'intersection de D avec OM et Ox; on a

$$\rho = \frac{\sin \text{IME}}{\sin \text{IMF}} : \frac{\sin \text{OME}}{\sin \text{OMF}} = \frac{\text{IE} \cdot \text{NE}}{\text{IF} \cdot \text{NF}}.$$

⁽¹⁾ *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXVIII, p. 1837.

Ce rapport anharmonique étant constant (¹), quelle que soit la droite OM, évaluons-le dans le cas particulier où OM coïncide avec Ox. Alors le point I est rejeté à l'infini, et l'on obtient

$$\rho = \frac{QF}{QE} = \frac{\text{tang} QOF}{\text{tang} QOE} = \frac{m''}{m'}.$$

En remplaçant dans (15) u, v, w et ρ par leurs expressions, et simplifiant, on trouve l'intégrale cherchée

$$(x-h)^{m'-m''}(y-m'x)^{m''}(y-m''x)^{-m'} = C. \quad (14)$$

Remarque. — Les courbes définies par cette équation seront algébriques, si l'on a $\alpha = \beta$, et si α est commensurable avec h .

22. Étude d'une équation différentielle. — Nous allons maintenant examiner quelques cas particuliers intéressants de l'équation différentielle

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} &(x^2 + y^2)(xdy - ydx) - (ax^2 + bxy + cy^2)dy \\ &+ (ax^2 + \beta xy + \gamma y^2)dx = 0. \end{aligned} \right.$$

Cette équation définit un faisceau de caractéristique $\nu = 2$, ayant à l'origine un point principal quadruple. Il ne se distingue des autres faisceaux satisfaisant aux mêmes conditions qu'en ce que les points où la droite de l'infini est tangente à des courbes de ce faisceau sont les deux ombilics, c'est-à-dire les deux points imaginaires communs à tous les cercles du plan. Cette particularité, qui disparaît au moyen d'une transformation homographique, facilite, comme on va le voir, l'étude des courbes définies par l'équation (16); et d'abord elle va nous permettre de ramener cette équation à une équation différentielle linéaire, par une mé-

(¹) On sait d'avance que ce rapport anharmonique est constant pour tout système (1, 1) (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXVIII, p. 1693); mais on peut le vérifier dans le cas actuel, en remarquant que, S étant le pied de la perpendiculaire abaissée de P sur OM, on a

$$\frac{IE}{IF} : \frac{OE}{OF} = \frac{\sin PSE}{\sin PSF} : \frac{\sin OSE}{\sin OSF}.$$

Le second de ces rapports anharmoniques est constant, car les quatre angles dont il dépend le sont, les cinq points E, F, O, P, S étant sur le cercle décrit sur OP comme diamètre

thode différente de la méthode générale indiquée plus haut (10), et qui présente, dans certains cas, des avantages sur cette dernière.

A cet effet, effectuons un changement de variables, en posant

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

d'où

$$\theta = \arctan \frac{y}{x}.$$

On tire de là, en différenciant,

$$dx = dr \cos \theta - r \sin \theta d\theta, \quad dy = dr \sin \theta + r \cos \theta d\theta,$$

$$\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = d\theta.$$

En substituant dans l'équation (16), il vient

$$(17) \quad \begin{cases} r^2 d\theta - (a \cos^2 \theta + b \sin \theta \cos \theta + c \sin^2 \theta)(dr \sin \theta + r \cos \theta d\theta) \\ + (a \cos^2 \theta + \beta \sin \theta \cos \theta + \gamma \sin^2 \theta)(dr \cos \theta - r \sin \theta d\theta) = 0. \end{cases}$$

Après avoir développé et ordonné, posons

$$u = \frac{1}{r}, \quad \text{d'où} \quad du = -\frac{dr}{r^2},$$

$$a \cos^3 \theta + (\beta - a) \cos^2 \theta \sin \theta + (\gamma - b) \cos \theta \sin^2 \theta - c \sin^3 \theta = \frac{-1}{\psi(\theta)},$$

$$a \cos^3 \theta + (b + a) \cos^2 \theta \sin \theta + (c + \beta) \cos \theta \sin^2 \theta + \gamma \sin^3 \theta = \frac{\varphi(\theta)}{\psi(\theta)}.$$

En faisant cette substitution dans (17), on obtient l'équation différentielle linéaire

$$\frac{du}{d\theta} + u \varphi(\theta) + \psi(\theta) = 0.$$

23. D'après ce que l'on a vu plus haut (8), si l'on considère une droite quelconque OM issue de l'origine, les tangentes menées, aux divers points de cette droite, aux courbes du faisceau qui y passent, concourent en un même point I; et ce point est donné par l'intersection des deux droites

$$(18) \quad \begin{cases} y = \frac{a + \beta t + \gamma t^2}{a + b t + c t^2} x, \\ y = t x + \frac{a + (\beta - a) t + (\gamma - b) t^2 - c t^3}{1 + t^2}. \end{cases}$$

La construction du point I peut se faire d'une manière simple dans certains cas particuliers. Supposons, par exemple, que l'on ait

$$\beta = a, \quad b = -a, \quad c = 0, \quad \gamma = 0.$$

Les équations (18) se réduisent à

$$y = \frac{\alpha + at}{a - at},$$

$$y = tx + \alpha.$$

La seconde de ces équations représente une droite parallèle à OM, et passant constamment par un point fixe A ($x = 0, y = \alpha$), quelle que soit cette droite. Quant à la première, en posant

$$\frac{\alpha}{a} = \tan \omega, \quad t = \tan \theta,$$

son équation peut s'écrire

$$y = x \tan(\theta + \omega),$$

ce qui indique qu'elle fait avec OM un angle constant et égal à ω . De là on conclut la construction du point I pour chaque position de la droite OM : ce point se trouve à l'intersection de la parallèle à OM menée par le point A ($x = 0, y = \alpha$) et de la droite passant par O et inclinée sur OM de l'angle ω . Le lieu des points I est par suite le segment capable de l'angle ω décrit sur OA.

24. L'équation différentielle (16) se réduit, dans le cas considéré, à

$$(19) \quad (x^2 + y^2)(x dy - y dx) - x(ax - ay) dy + x(ax + ay) dx = 0;$$

elle est la traduction analytique de l'énoncé suivant :

Étant donnés deux points fixes O et A, trouver un système de courbes telles que la tangente en un point quelconque M à la courbe qui y passe aboutisse au point I d'intersection de la parallèle à OM menée par le point A, avec la droite inclinée d'un angle constant ω sur OM et menée par le point O.

Cherchons à intégrer l'équation (19). Pour cela, écrivons-la de

la manière suivante :

$$(x^2 + y^2 - ax)(xdy - ydx) + ax(xdx + ydy) = 0,$$

ou bien, en effectuant les changements de variables indiqués précédemment (22),

$$r(r - a \cos \theta) d\theta + a dr \cos \theta = 0,$$

ou encore

$$\frac{du}{d\theta} + \frac{a}{\alpha} u - \frac{1}{\alpha \cos \theta} = 0.$$

C'est une équation différentielle linéaire, dont l'intégrale générale est

$$u = e^{-\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{a d\theta}{\alpha}} \left(C - \int_{\theta_0}^{\theta} e^{\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{a d\theta}{\alpha}} \frac{d\theta}{\alpha \cos \theta} \right),$$

ou bien

$$(20) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{a}{\alpha}(\theta - \theta_0)} \left[C - \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{e^{\frac{a}{\alpha}(\theta - \theta_0)}}{\cos \theta} d\theta \right].$$

25. Considérons le cas particulier où $a = 0$, c'est-à-dire $\omega = \frac{\pi}{2}$.
L'intégrale précédente se simplifie et se réduit à

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\alpha} \left(C - \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\cos \theta} \right),$$

d'où l'on conclut, en effectuant l'intégration,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\alpha} \left[C - \log \tanh \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \right],$$

ou encore

$$(21) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{\alpha} \log \frac{K}{\tanh \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)} \quad (1).$$

Dans ces équations, C et K désignent des constantes arbitraires.

(1) En faisant tourner l'axe polaire d'un angle égal à $2\pi - \theta$, cette équation devient

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\alpha} \log \frac{K}{\tanh \frac{\theta}{2}}.$$

Nous avons ainsi, en termes finis, l'équation générale des courbes qui répondent à la question suivante :

Étant donnés deux points fixes O et A, trouver un système de courbes tel, que la tangente en M à la courbe qui y passe aboutisse au point I d'intersection de la parallèle à OM menée par le point A avec la perpendiculaire à cette droite menée par le point O.

IV. — Courbe d'ombre de la surface de vis à filet carré, éclairée par des rayons convergents.

26. Examinons maintenant le cas où l'on a

$$b = 0, \quad c = -a, \quad \alpha \neq 0, \quad \beta = 2a, \quad \gamma = 0.$$

L'équation (16) devient

$$(22) \quad (x^2 + y^2)(x dy - y dx) - a(x^2 - y^2) dy + 2axy dx = 0.$$

Pour intégrer cette équation, servons-nous de la transformation indiquée plus haut (22) : elle devient alors, toutes réductions faites,

$$a \sin \theta \frac{dr}{d\theta} - ar \cos \theta + r^2 = 0,$$

ou encore

$$a \sin \theta \frac{du}{d\theta} + au \cos \theta = 1.$$

En remarquant que le premier membre de la dernière équation est la dérivée exacte de $au \sin \theta$, et désignant par ω un angle constant, on obtient l'intégrale cherchée, qui est

$$au \sin \theta = \theta - \omega,$$

d'où l'on tire, à cause de $\frac{1}{u} = r$,

$$(23) \quad r = \frac{a \sin \theta}{\theta - \omega}.$$

27. Les courbes définies par une équation de cette forme jouissent d'une propriété remarquable : ce sont les *projections, sur un plan horizontal, des lignes d'ombre propre d'une surface de vis à filet carré à axe vertical, éclairée par des rayons lumineux convergents.*

Nous avons déjà rencontré ce résultat dans une étude *Sur les surfaces de vis*, insérée au *Compte rendu du Congrès de Paris de l'Association française pour l'avancement des Sciences* (p. 177). Nous allons en donner ici une nouvelle démonstration directe, à l'aide de quelques considérations géométriques fort simples.

Prenons pour plan horizontal de projection le plan perpendiculaire à l'axe de la surface de vis qui contient le point lumineux A, et, dans ce plan, rapportons la projection de la courbe d'ombre propre à un système de coordonnées polaires ayant pour pôle le pied O de l'axe de la surface de vis, et pour axe polaire Ox la droite joignant le point O au point lumineux A. Posons $OA = a$, et désignons par ω l'angle que fait avec Ox la génératrice de la surface située dans le plan horizontal. En appelant h le pas de la surface de vis, et p le paramètre de distribution commun à toutes les génératrices, on a, comme on sait, $p = \frac{h}{2\pi}$.

28. Cela posé, considérons une génératrice quelconque G dont la projection horizontale Og fait avec Ox un certain angle que nous désignerons par θ , et évaluons la distance $Om = r$ du point O au point m , projection horizontale du point M de la courbe d'ombre situé sur G. Ce point M n'est autre chose que le point de la génératrice G en lequel le plan passant par cette droite et le point lumineux A est tangent à la surface; en désignant par φ l'angle de ce plan avec le plan projetant horizontalement la génératrice G, et se rappelant que ce dernier plan est le plan central de la génératrice et que le point central est situé sur l'axe, on a

$$(24) \quad r = p \tan \varphi.$$

Évaluons $\tan \varphi$; pour cela, soient l la distance du point A à Og et d la hauteur de G au-dessus du plan horizontal de projection. On a évidemment

$$\tan \varphi = \frac{l}{d};$$

mais on a aussi d'autre part

$$l = a \sin \theta, \quad d = \frac{h}{2\pi} (\theta - \omega).$$

En tenant compte de ces expressions, et substituant à p et à $\tan \varphi$

leur valeur dans la relation (24), on obtient

$$r = \frac{a \sin \theta}{\theta - \omega},$$

équation polaire de la projection horizontale de la courbe d'ombre. C'est identiquement, comme on le voit, l'équation (23) ⁽¹⁾.

29. *Remarques.* — 1° L'équation trouvée est indépendante du pas h de la surface de vis; on en conclut que *la projection horizontale de la courbe d'ombre est la même, pour toutes les surfaces de vis à filet carré de même axe, éclairées par le même point lumineux, et ayant en commun une génératrice située dans le plan horizontal qui contient le point lumineux.*

2° Pour une même surface de vis à filet carré, si l'on déplace le point lumineux sur une verticale, on obtient une succession de courbes d'ombre, et, pour avoir les équations polaires des projections horizontales de ces courbes, il n'y a qu'à faire varier ω dans l'équation (23). L'angle ω n'étant autre chose que la constante arbitraire introduite par l'intégration de l'équation (22), on en conclut que, *sur un même plan horizontal, les projections des courbes d'ombre d'une surface de vis à filet carré, éclairée par une série de points lumineux situés sur une parallèle à l'axe de la surface, forment un faisceau de caractéristique égale à 2, ayant pour point principal quadruple le pied de l'axe sur le plan de projection.*

30. Les points principaux du faisceau des courbes d'ombre sont donnés par le système des deux équations

$$(25) \quad \begin{cases} (x^2 + y^2)x - a(x^2 - y^2) = 0, \\ (x^2 + y^2)y - 2axy = 0. \end{cases}$$

La seconde équation se dédouble en $y = 0$, et

$$(26) \quad x^2 + y^2 - 2ax = 0.$$

(¹) Dans le cas où ω est nul, c'est-à-dire où le point lumineux est sur la surface, l'équation se réduit à $r = \frac{a \sin \theta}{\theta}$. Elle est vérifiée, quel que soit r , pour $\theta = 0$, ce qui signifie que l'axe polaire, ou bien la génératrice qui contient le point lumineux, fait partie de la ligne d'ombre; c'est évident géométriquement.

En faisant $y = 0$ dans la première des équations (25), elle se réduit à

$$x^2(x - a) = 0,$$

ce qui donne comme point principal, en dehors du point O déjà connu, le point A ($x = a, y = 0$), c'est-à-dire la projection horizontale du point lumineux.

En vertu de l'équation (26), remplaçons dans la première des équations (25) $x^2 + y^2$ par $2ax$; nous obtenons

$$x^2 + y^2 = 0,$$

équation qui, combinée avec (26), fournit les deux autres points principaux; ce sont, comme on le voit, les deux ombilics du plan.

En résumé, *les points principaux du faisceau composé des projections des courbes d'ombre de la surface de vis à filet carré comprennent le pied de l'axe de la surface de vis qui compte pour quatre points, la projection du point lumineux et les deux ombilics du plan.*

31. Les deux équations (25) se prêtent à une interprétation géométrique très-simple : elles définissent respectivement les lieux des points de contact des tangentes aux courbes du faisceau parallèles à l'axe des y et à l'axe des x .

La seconde des équations (25), nous l'avons déjà vu, se double en

$$y = 0 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 - 2ax = 0.$$

Le lieu qu'elle définit comprend, par suite, la droite OA, ce qui s'explique par cette raison que la droite OA fait partie du faisceau (28); il comprend, en outre, le cercle décrit du point A comme centre avec AO pour rayon.

Quant à la première des équations (25) (1), on reconnaît qu'elle n'est autre que l'équation de la *strophoïde droite* ayant pour point double le point O et pour sommet le point A. On conclut de là le résultat suivant :

Les points de contact des tangentes menées à la projection

(1) Ou, en coordonnées polaires, $r = \frac{a \cos 2\theta}{\cos \theta}$.

horizontale de la courbe d'ombre de la surface de vis à filet carré, parallèlement à la droite qui joint le pied de l'axe à la projection du point lumineux, sont situés sur le cercle décrit de ce dernier point comme centre et passant par le pied de l'axe.

Les points de contact des tangentes à la même courbe perpendiculaires à la direction précédente, sont situés sur une strophoïde droite, ayant pour point double le pied de l'axe de la surface de vis, et pour sommet la projection du point lumineux.

On peut ajouter, à cause de la forme même de l'équation (22), que les points de contact des tangentes menées à la même courbe parallèlement à une direction fixe, mais d'ailleurs quelconque, sont sur une anallagmatique du troisième ordre, ayant pour point double le pied de l'axe de la surface de vis. L'asymptote réelle est parallèle à la direction choisie, et les tangentes au point double sont rectangulaires.

32. Construction de la tangente à la projection horizontale de la courbe d'ombre. — Pour avoir la tangente en un point quelconque M de la projection de la courbe d'ombre, il suffit de déterminer le point I auquel aboutissent les tangentes aux courbes du faisceau (22) menées aux divers points de rencontre de ces courbes avec OM.

Ce point I est déterminé par l'intersection des deux droites (18) dont les équations deviennent, dans le cas actuel,

$$(27) \quad y = \frac{2t}{1-t^2}x,$$

$$(28) \quad y = t(x+a).$$

A cause de $t = \tan \theta$, l'équation (27) peut s'écrire

$$y = x \tan 2\theta.$$

Par suite, la droite qu'elle définit fait avec Ox un angle double de l'angle formé par OM avec la même droite; autrement dit, elle est symétrique de Ox par rapport à OM.

La droite (28) est la parallèle à OM menée par le point fixe B, symétrique de A par rapport à O. De la construction de ces

deux droites on conclut immédiatement que le point I s'obtient en prenant le symétrique du point A par rapport à OM.

En conséquence, *la tangente, en un point quelconque M de la projection horizontale de la courbe d'ombre de la surface de vis à filet carré, s'obtient en joignant le point M au point symétrique de la projection du point lumineux, par rapport à la droite qui joint M au pied de l'axe de la surface de vis.*

Cette construction donne, comme cas particulier, celle de l'asymptote. L'équation (23) indique, et on le voit d'ailleurs géométriquement, que la courbe a une asymptote parallèle à la génératrice de la surface de vis située dans le plan horizontal qui contient le point lumineux. L'asymptote elle-même est la parallèle à cette génératrice menée par le point B.

33. La construction à laquelle nous venons d'arriver, pour la tangente à la projection horizontale de la courbe d'ombre de la surface de vis à filet carré, se trouve mentionnée dans la Note sur les surfaces de vis que nous avons communiquée au Congrès de Paris de l'Association française : à ce moment-là cette construction nous avait paru nouvelle ; mais depuis nous l'avons retrouvée dans le *Traité de Géométrie descriptive* de M. de la Gournerie (III^e Partie, p. 148), où elle est obtenue d'une manière simple et élégante par la considération d'un paraboloïde osculateur. Nous saisissons l'occasion qui se présente de restituer au savant géomètre la priorité qui lui appartient dans cette question, en appelant seulement l'attention sur la méthode toute différente qui nous a conduit à la résoudre, et notamment sur l'équation très-simple en coordonnées polaires de la projection horizontale de la courbe d'ombre, qui nous semble n'avoir pas été signalée jusqu'ici dans les traités de Géométrie descriptive. Cette équation, non-seulement se prête à la détermination facile de la tangente, comme nous l'avons vu, mais elle permet aussi de se rendre compte très-aisément de l'allure générale et des particularités intéressantes que présente la courbe.

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX.

SÉANCE DU 28 FÉVRIER 1879.

PRÉSIDENCE DE M. JORDAN.

Élection : M. E. Picard, présenté dans la séance précédente, est élu Membre de la Société.

Présentation de nouveaux Membres : M. Appell, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Paris, est présenté par MM. Lemonnier et Picquet. M. Stéphanos est présenté par MM. Halphen et Laguerre.

Communications :

M. Laguerre ajoute quelques développements à la Communication faite par lui à la dernière séance *Sur l'intégrale* $\int_x^\infty \frac{e^{-x} dx}{x}$.

M. Halphen : *Sur la multiplication des fonctions elliptiques.*

M. Laquière adresse une Note *Sur la Géométrie des quinconces.*

SÉANCE DU 14 MARS 1879.

PRÉSIDENCE DE M. JORDAN.

Élections : MM. Appell et Stéphanos, présentés dans la dernière séance, sont élus Membres de la Société.

Présentation d'un nouveau Membre : M. Borchardt, membre de l'Académie des Sciences de Berlin, est présenté par MM. Hermite et Laguerre.

Communications :

M. Darboux : *Sur la théorie des quadrilatères articulés.*

M. Vicaire : *Sur le calcul des intensités d'une série de courants dérivés.*

M. Halphen : *Sur les faisceaux de courbes unicursales.*

M. le comte Hugo adresse une Note *Sur un diagramme des variations de la scintillation selon les saisons.*

SÉANCE DU 28 MARS 1879.

PRÉSIDENCE DE M. LAGUERRE.

Election : M. Borchardt, présenté à la dernière séance, est élu Membre de la Société.

Communications :

M. Rodet : *Sur une méthode d'approximation des racines carrées, connue dans l'Inde antérieurement à la conquête d'Alexandre.*

M. Stéphanos : *Sur une généralisation de la théorie des groupes projectifs de Staudt.*

M. E. Picard : *Sur le développement des fonctions analytiques multiformes.*

La Société reçoit de M. Halphen une Note *Sur le développement des fonctions elliptiques*; de M. Saltel, une Note *Sur divers théorèmes et problèmes de Géométrie*; de M. le comte Hugo, une Note *Sur les sphères hexagonales d'un collier égyptien.*

SÉANCE DU 11 AVRIL 1879.

PRÉSIDENCE DE M. LAGUERRE.

M. Laguerre dépose sur le Bureau un extrait d'une Lettre qu'il a reçue de M. Brioschi *Sur les équations différentielles linéaires.*

Communications :

M. Halphen : *Sur diverses propriétés du faisceau formé de courbes du troisième ordre ayant trois points d'inflexion communs.*

M. Laguerre : *Sur quelques propriétés de l'hypocycloïde à trois points de rebroussement.*

SÉANCE DU 25 AVRIL 1879.

PRÉSIDENTE DE M. JORDAN.

M. Hermite dépose une Note *Sur l'indice des fractions rationnelles.*

Communications :

M. Borchardt : *Sur un système de trois équations différentielles totales qui définissent la moyenne arithmético-géométrique de quatre éléments.*

M. Darboux : *Sur les quadrilatères articulés.*

M. Jordan : *Sur l'équivalence des formes algébriques.*

SÉANCE DU 9 MAI 1879.

PRÉSIDENTE DE M. JORDAN.

M. Jung adresse une Note *relative à deux théorèmes de Lagrange sur le centre de gravité.*

Communications :

M. Stéphanos : *Sur les réseaux de coniques et sur les courbes du troisième degré et de la troisième classe.*

M. Haag : *Sur les relations entre les éléments caractéristiques d'une courbe gauche et les accélérations d'un point qui la décrit.*

M. E. Picard : *Sur les fonctions uniformes entières.*

M. Jordan : *Sur la réduction des substitutions linéaires.*

M. Picquet fait l'analyse d'un Mémoire dont il est l'auteur *Sur les courbes et surfaces algébriques anallagmatiques.*

SÉANCE DU 23 MAI 1879.

PRÉSIDENTE DE M. JORDAN.

Présentation de nouveaux membres : M. Le Paige, professeur d'Analyse mathématique à l'Université de Liège, et M. Lehon,

professeur au Lycée Charlemagne, sont présentés par MM. Laisant et Éd. Lucas.

Communications :

M. Hermary : *Sur la construction des centres des sphères tangentes à quatre plans.*

M. Jordan : *Sur les caractéristiques des fonctions Θ .*

M. Halphen : *Sur les triangles inscrits et circonscrits aux courbes du troisième degré.*

SÉANCE DU 13 JUIN 1879.

PRÉSIDENCE DE M. LEMONNIER.

Communications :

M. Haton de la Goupillière : *Sur la similitude dans les phénomènes de chaleur relatifs aux corps cristallisés.*

M. Stéphanos : *Sur la corrélation dans le plan.*

SÉANCE DU 27 JUIN 1879.

PRÉSIDENCE DE M. BONNET.

Communications :

M. Fouret : *Sur les faisceaux ponctuels plans de caractéristique ν , ayant un point principal multiple d'ordre ν .*

M. Éd. Lucas : *Sur le jeu du solitaire et sur un coup singulier du jeu de dames.*

M. Stéphanos : *Sur le problème du cavalier aux échecs.*

M. l'abbé Aoust adresse un Mémoire *Sur les courbes dont les développées par le plan et les développantes par le plan sont égales entre elles.*

Élections : MM. Le Paige et Lebon, présentés dans l'avant-dernière séance, sont élus Membres de la Société.

SÉANCE DU 11 JUILLET 1879.

PRÉSIDENCE DE M. DE POLIGNAC.

Communications :

M. Rodet : *Sur les méthodes d'approximation chez les anciens.*

M. Stéphanos : *Sur le système de trois tétraèdres, dont deux quelconques sont en perspective, par rapport à chacun des sommets du troisième.*

M. Fouret : *Sur la construction de la tangente à la courbe*

$$r = \frac{a \sin \theta}{\theta - m \cos \theta}.$$

M. E. Picard : *Sur la démonstration de l'existence d'une racine pour toute fonction entière.*

M. Demetre Demecscky de Gyer : *Sur la décomposition des fonctions algébriques entières, à coefficients entiers, en leurs facteurs irréductibles.*

SÉANCE DU 25 JUILLET 1879.

PRÉSIDENCE DE M. DE POLIGNAC.

Communications :

M. Alexéeff, professeur à l'Université de Moscou : *Sur l'extraction de la racine carrée d'un nombre.*

M. E. Picard : *Sur l'intégration de l'équation*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p \frac{dy}{dx} + q = 0,$$

dans laquelle p et q sont des fonctions doublement périodiques de seconde espèce.

M. Lemonnier : *Sur un déterminant dont les lignes se déduisent les unes des autres par des permutations circulaires.*

M. Stéphanos : *Sur un certain covariant relatif à une courbe de la classe m et à une conique.*

M. Rodet : *Sur un procédé ancien pour la solution en nombres entiers de l'équation indéterminée $ax + by = c$.*

FIN DU TOME SEPTIÈME.

TABLE DES MATIÈRES.

EXTRAITS DES PROCÈS-VERBAUX.

	Pages.
État du Bureau et du Conseil pour l'année 1879.....	5 et 65
Séance du 8 novembre 1878.....	63
Séance du 21 novembre 1878.....	63
Séance du 13 décembre 1878	64
Séance du 27 décembre 1878...	64
Séance du 10 janvier 1879.....	64
Séance du 24 janvier 1879.....	65
Séance du 14 février 1879.....	65
Séance du 28 février 1879.....	205
Séance du 14 mars 1879.....	205
Séance du 28 mars 1879.....	206
Séance du 11 avril 1879.....	206
Séance du 25 avril 1879.....	207
Séance du 9 mai 1879.....	207
Séance du 23 mai 1879.....	207
Séance du 13 juin 1879.....	208
Séance du 27 juin 1879.....	208
Séance du 11 juillet 1879.....	209
Séance du 25 juillet 1879.....	209

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Note relative à deux théorèmes de Lagrange sur le centre de gravité; par M. G. DARBOUX.....	7
Sur l'intégrale $\int_0^z z^n e^{-\frac{z^2}{2} + zx} dz$; par M. LAGUERRE.....	12
Sur la résolution de trois équations du second degré en x, y, z ; par M. LEMONNIER.....	16
Détermination du nombre des arrangements complets où les éléments consécutifs satisfont à des conditions données; par M. DÉSIRÉ ANDRÉ.....	43

	Pages.
Sur quelques propriétés des coniques homofocales; par M. LAGUERRE.....	66
Sur l'intégrale $\int_x^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{x}$; par M. LAGUERRE.....	72
Sur une propriété remarquable des nombres incommensurables; par M. STÉ- PHANOS.....	81
Sur l'équation différentielle des coniques; par M. HALPHEN.....	83
Note sur la Géométrie des quinconces; par M. LAQUIÈRE.....	85
Sur le développement d'une fonction intermédiaire; par M. HALPHEN.....	92
Sur une méthode d'approximation des racines carrées, connue dans l'Inde anté- rieurement à la conquête d'Alexandre; par M. L. RODET.....	98
Sur une classe de fonctions non uniformes; par M. E. PICARD.....	102
Sur les équations différentielles linéaires. (Extrait d'une Lettre de M. BRIOSCHI à M. LAGUERRE.).....	105
Sur quelques propriétés de l'hypocycloïde à trois points de rebroussement; par M. LAGUERRE.....	108
Sur un système de trois équations différentielles totales qui définissent la moyenne arithmético-géométrique de quatre éléments; par M. C.-W. BORCHARDT.....	124
Sur l'indice des fractions rationnelles; par M. HERMITE.....	128
Note relative à deux théorèmes de Lagrange sur le centre de gravité; par M. JUNG.....	132
Solution simple d'un problème de Géométrie descriptive élémentaire; par M. HERMARY.....	138
Note sur les relations entre les éléments caractéristiques d'une courbe gauche et les accélérations du point qui la décrit; par M. HAAG.....	140
Intégrales des courbes dont les développantes par le plan et les développées par le plan sont égales entre elles; par M. l'abbé Aoust.....	143
Sur les méthodes d'approximation chez les anciens; par M. L. RODET.....	159
Sur l'extraction de la racine carrée d'un nombre; par M. N. ALEXÉEFF.....	167
Sur un procédé ancien pour la solution en nombres entiers de l'équation indé- terminée $ax + by = c$; par M. L. RODET.....	171
Calcul d'un déterminant; par M. H. LEMONNIER.....	175
Sur les faisceaux ponctuels plans de caractéristique ν , ayant un point principal multiple d'ordre ν ; par M. G. FOURET.....	177

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME VII.

